Objectifs et savoir-faire

- *Matrices*
  - Maîtriser les opérations algébriques sur les matrices.
  - Comprendre la notion d'inversibilité d'une matrice et le lien avec les systèmes linéaires.
  - Calculer l'inverse d'une matrice.
  - Calculer des puissances de matrices (intuition et récurrence, binôme de Newton, utilisation d'un polynôme annulateur ou «diagonalisation guidée»).
  - Utiliser des puissances de matrices (notamment pour des systèmes de suites récurrentes).
- Dénombrement.
  - Maîtriser les notions d'ensemble fini et de cardinal.
  - Identifier le concept (p-liste, p-liste sans répétition, etc.) correspondant à une expérience (tirage de carte, etc.).
  - Maîtriser les différentes techniques de dénombrement.
- Probabilités sur un univers fini.
  - Reconnaître une situation de probabilité uniforme.
  - Utiliser des dénombrements pour calculer des probabilités.
  - Utiliser les formules des probabilités totales, des probabilités composées, de Bayes.
  - Maîtriser la notion de probabilité conditionnelle.
  - Comprendre et utiliser la notion d'indépendance (deux à deux, mutuelle) d'événements.

► **Note aux colleurs :**
- En probabilités, pour le moment, l'univers est toujours fini.

► **Note aux étudiants :**
- La calculatrice peut être utile en colle, penser à la prendre !

► **Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :**

1. Trouver l'inverse éventuel des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\ ,\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Exprimer A^2 en fonction de A et I_3 puis en déduire A^{-1}.

3. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice dont le seul coefficient non nul est celui à la place (i,j) qui vaut 1. Soit $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$, calculer $E_{i,j}E_{k,\ell}$.

4. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures A et B est une matrice triangulaire supérieure et que les coefficients diagonaux de AB sont les produits de ceux de A et de B.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

6. Calculer les puissances de la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

8. Calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9. À l'aide d'un polynôme annulateur, calculer les puissances de la matrice $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.