Objectifs et savoir-faire

- Probabilités sur un univers fini.
  - Reconnaître une situation de probabilité uniforme.
  - Utiliser les formules des probabilités totales, des probabilités composées, de Bayes.
  - Maîtriser la notion de probabilité conditionnelle.
  - Comprendre et utiliser la notion d'indépendance (deux à deux, mutuelle) d'événements.
- *Variables aléatoires réelles finies :*
  - Maîtriser les notions générales : v.a. finie, loi d'une v.a., représentation de la loi.
  - Maîtriser la notion d'espérance d'une v.a. : définition, calcul, positivité, croissance, linéarité, théorème de transfert $\mathbb{E}(u(x)) = \sum_{x\in X(\Omega)} u(x)\mathbb{P}(X = x)$.
  - Maîtriser les notions de variance et d'écart-type : définitions, formule de Koenig-Huygens, positivité de la variance, $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$.
  - Connaître quelques lois de référence : loi certaine, loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale.

► **Note aux colleurs :**

- Pour le moment, l'univers est toujours fini.
- Au premier semestre, les fonctions de répartition ne sont pas étudiées.

► **Note aux étudiants :**

- La calculatrice peut être utile en colle, penser à la prendre !

► **Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :**

1. On tire 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir un full ? un brelan (mais pas mieux) ? deux paires (mais pas mieux) ? au moins deux as ?
2. Un lot de dés contient 25% de dés pipés pour lesquels la probabilité d'obtenir 6 est de $0,5$. On choisit un dé au hasard.
   a. On lance le dé, on obtient 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
   b. On relance le dé et on obtient à nouveau 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
3. En vue du dépistage d'une maladie, on a mis au point un test. Si le patient est atteint, le test donne un résultat positif dans 99% des cas. Si le patient est en bonne santé, le test donne quand-même un résultat positif dans 2% des cas (des *faux positifs*). On sait qu'en moyenne, un patient sur 1000 est atteint.
   Quelle est la probabilité pour qu'un patient, choisi au hasard, soit atteint par la maladie, sachant que son test est positif ?
4. On considère des événements A, B et C sur un univers fini Ω.
   a. Montrer que si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.
   b. Montrer que si A, B et C sont mutuellement indépendants alors A, B et $\overline{C}$ sont également mutuellement indépendants.
   c. Montrer que si A, B et C sont mutuellement indépendants alors A et $B \cup C$ sont indépendants.
5. Calculer l'espérance et la variance d'une loi binomiale.
6. Une urne contient n boules numérotées de 1 à N. On effectue deux tirages d'une boule avec remise.
   On note X la variable aléatoire égale à la différence entre le plus grand numéro obtenu et le plus petit.
   Déterminer la loi de X puis calculer son espérance.
7. La probabilité d'observer une maladie dans une population est $0,1$. La maladie peut être détectée sans erreur par un dosage sanguin. On considère une population de 100 personnes, toutes indépendantes les unes des autres.
   On forme, au hasard, n groupes de $k = \frac{100}{n}$ personnes. Au lieu de tester les 100 personnes individuellement, on teste le mélange des sérums d'un groupe : si le test est négatif alors on considère que les k personnes sont saines et on est dispensé de k tests individuels ; si le test est positif alors on teste individuellement les k personnes du groupe.
   a. Soit Y le nombre de personnes malades dans un groupe. Calculer $p = \mathbb{P}(Y \geqslant 1)$ en fonction de n.
   b. On note X la v.a. comptant le nombre de groupes pour lesquels le test est positif et N la v.a. comptant le nombre total de tests à effectuer avec cette méthode.
   Quel est le lien entre N et X ?
   c. Exprimer l'espérance de N en fonction de n.
   d. À l'aide d'un outil informatique (calculatrice, Python,...) déterminer n afin que $\mathbb{E}(N)$ soit minimale.

8. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages indépendants avec remise. On note X le nombre de tirages effectués jusqu'à obtenir un numéro supérieur ou égal au numéro obtenu lors du tirage précédent.

a. Justifier que $X(\Omega) = [\![2, n+1]\!]$.

b. Pour tout $k \in X(\Omega)$, déterminer la probabilité de l'événement $(X \geqslant k)$.

c. En déduire la loi de X.

d. Calculer l'espérance de X.

9. L'équipe de communiquants de l'un des deux candidats à une élection décide d'être active sur les réseaux sociaux en postant régulièrement des messages tantôt valorisant le programme de leur candidat, tantôt dénigrant celui de leur adversaire. On suppose que :

- si le k-ième message valorise le programme de son candidat alors il y a une probabilité égale à $0,6$ que le suivant valorise à nouveau ce programme (donc une probabilité égale à $0,4$ qu'il dénigre le programme du candidat adverse) ;
- si le k-ième message dénigre le programme du candidat adverse alors il y a une probabilité égale à $0,8$ que le suivant valorise le programme de son candidat (donc une probabilité égale à $0,2$ qu'il dénigre à nouveau le programme du candidat adverse).

On note V_k l'événement « le k-ième message valorise le programme de son candidat ».

a. Quelles sont les probabilités directement données par l'énoncé ?

b. Soit $k \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{P}(V_{k+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(V_k)$ (en justifiant avec rigueur).

c. Déterminer l'expression de $\mathbb{P}(V_k)$ en fonction de $k \in \mathbb{N}$ et de $\mathbb{P}(V_0)$.

d. Quelle est la limite de la suite $\left(\mathbb{P}(V_k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$?

10. Deux individus A et B décident de se battre en duel au pistolet ; ils tirent à tour de rôle et le gagnant est le premier qui touche son adversaire. Le candidat A tire en premier et a, à chaque tir, la probabilité p_1 de toucher son adversaire alors que, pour le candidat B, cette probabilité est égale à p_2 (avec $p_1 > 0$ et $p_2 > 0$).
On supposera les différents tirs mutuellement indépendants (bien que le succès d'un tir mette un terme à l'expérience).
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

- A_n l'événement «le tireur A effectue un n-ième tir et touche son adversaire» ;
- B_n l'événement «le tireur B effectue un n-ième tir et touche son adversaire» ;
- C_n l'événement «le n-ième tir est réussi».

a. Calculer $\mathbb{P}(C_1)$, $\mathbb{P}(C_2)$ et $\mathbb{P}(C_3)$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité de $\mathbb{P}(C_n)$.

c. Déterminer la limite quand N tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(C_n)$.