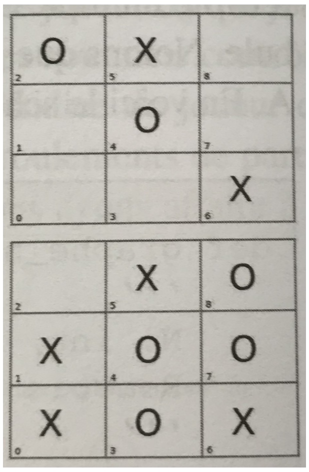
CHAPITRE 6

ÉLÉMENTS POUR L'ÉTUDE DE JEUX

I - Quelques exemples de jeux à deux joueurs

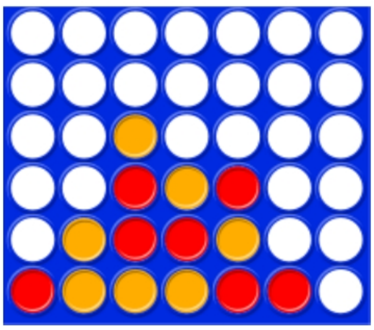
I.1 - Le jeu de Tic-tac-toe (ou morpion, ou oxo)

Sur un plateau de 9 cases, les joueurs placent à tour de rôle des symboles **O** ou **X**. Le gagnant est celui qui réalise un alignement de 3 jetons.



I.2 - Le jeu de puissance 4

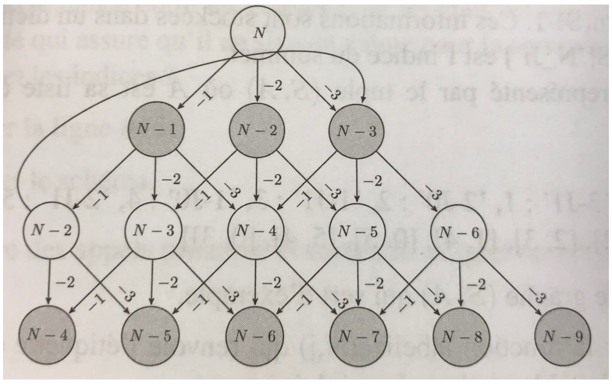
Deux joueurs jouent à tour de rôle avec des jetons de couleurs différentes en les plaçant dans une colonne et le jeton glisse alors jusqu'à la position la plus basse possible dans cette colonne. Le vainqueur est le joueur qui réalise le premier un alignement (horizontal, vertical ou diagonal) d'au moins quatre pions de sa couleur.
Si toutes les cases de la grille de jeu sont remplies sans alignement alors il y a match nul.



I.3 - Le jeu de Nim

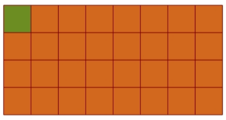
Le principe du jeu de Nim est le suivant. On dispose N jetons identiques posés sur une table.
À tour de rôle, deux joueurs doivent prendre un, deux ou trois jetons sans vider la table.
Le joueur qui se trouve devant un seul jeton a perdu.

On peut représenter un début de partie par un graphe :

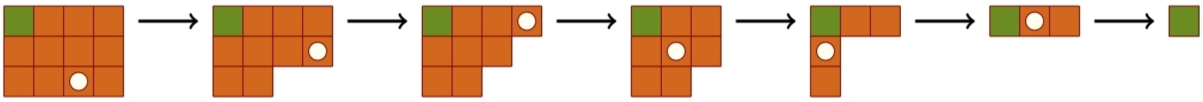


I.4 - Le jeu de Chomp

On considère une tablette de chocolat rectangulaire dont le coin supérieur gauche est empoisonné : chaque joueur choisit à tour de rôle un carré et le mange ainsi que tous les morceaux situés à la droite et en dessous du carré choisi.
Le joueur qui n'a plus d'autre choix que de manger le carré empoisonné a perdu.

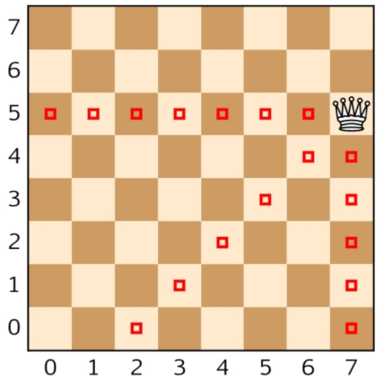


Voici le déroulement d'une partie :



I.5 - Le jeu de Wythoff

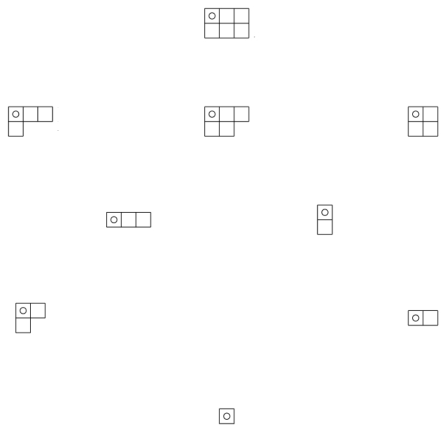
Sur un échiquier on place une reine puis deux joueurs, à tour de rôle, la déplacent vers la gauche, vers le bas, ou en diagonale en bas à gauche.
Le gagnant est celui qui atteint le coin inférieur gauche.



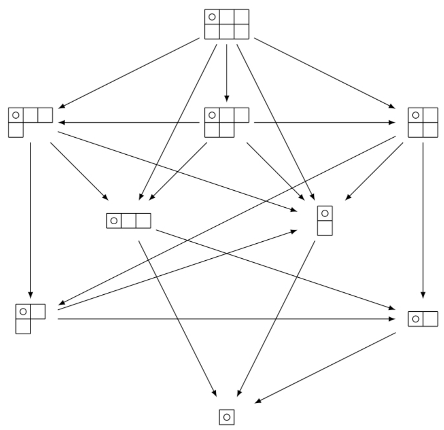
II - Utilisation de graphes et vocabulaire

Exemple

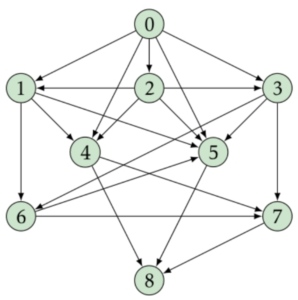
Considérons le jeu de Chomp dans le cas d'une tablette à deux lignes et trois colonnes. Les états possibles sont :

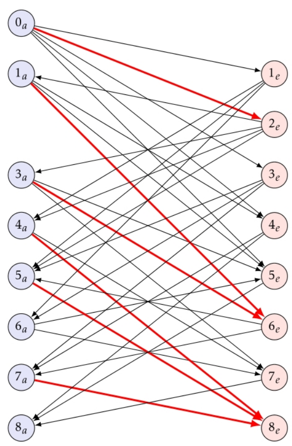


Les arcs entre deux sommets indiquent la possibilité pour un joueur de passer d'une position à l'autre :



En numérotant les sommets, on peut considérer un graphe biparti décrivant le jeu :





On peut considérer le graphe des «états du jeu» (ou arène) :

- ▷ il y a deux joueurs 1 et 2 ;
- ▷ il y a un nombre fini d'états ;
- ▷ les états finals correspondent aux sommets sans successeur : victoire pour J1, pour J2 et éventuellement «partie nulle» ;
- ▷ les autres états non finals sont «contrôlés» par J1 ou par J2 (c'est le joueur auquel c'est au tour de jouer qui décide du coup suivant) ;
- ▷ les états pour J1 ou J2 forment un graphe biparti (les sommets se répartissent en deux ensembles et les arcs ne vont que d'un ensemble à un autre) ;
- ▷ il y a match nul dans le cas d'une partie infinie ou si l'on atteint l'éventuel état «partie nulle».

On se contente d'étudier les ***jeux d'accessibilité*** qui sont des jeux pour lesquels il y a un ensemble de sommets sans successeurs (les cibles) et le graphe ne comporte pas de cycle (donc toute partie est finie).
Notons que le fait qu'il n'y ait pas de cycle assure qu'il existe au moins un sommet sans successeur.

Parmi les termes utilisés pour décrire des jeux, précisons-en quelques uns :

- un jeu est dit à *somme nulle* lorsque la somme des gains et pertes des deux joueurs est nulle *i.e.* le gain de l'un est la perte de l'autre ;
- un jeu est à *information complète* lorsque chaque joueur joue en connaissant les actions qu'il peut faire ainsi que celles que l'adversaire pourra alors faire ;
- un jeu est dit à *coups asynchrones* lorsque les joueurs jouent à tour de rôle.

Une ***stratégie*** (sans mémoire) pour un joueur J1 consiste en un choix d'une réponse prévue pour chaque état de jeu contrôlé par J1 (c'est donc une fonction de l'ensemble des états contrôles par J1 vers les états contrôlés par J2).

Étant donnée un état P_0 du jeu. Une ***stratégie gagnante*** pour le joueur J1 à partir de P_0 est une stratégie telle que toute partie issue de P_0 et respectant la stratégie de J1 conduise à la victoire de J1.
S'il existe une telle stratégie gagnante alors on dit que P_0 est une position gagnante pour J1 (*i.e.* J1 gagne nécessairement s'il joue conformément à sa stratégie).

Une position initiale peut donc être gagnante pour J1, gagnante pour J2 ou alors pour aucun des deux (dans ce cas, si les deux joueurs jouent «bien» alors la partie sera nulle).

III - Notion d'attracteur

Tout d'abord, on remarque que si l'on connaît des positions gagnantes pour J1 alors on peut en déduire d'autres.
En effet, si un état contrôlé par J2 n'a pour successeurs que des positions gagnantes pour J1 alors ce sont des positions gagnantes pour J1.
De même si un état contrôlé par J1 a au moins un successeur qui est une position gagnante pour J1 alors c'est également une position gagnante pour J1.
On peut créer de proche en proche des positions gagnantes.

Formellement, notons $G = (S, A)$ le graphe (biparti) du jeu, S_1 et S_2 les états contrôlés par J1 et J2 respectivement, et Att_0 l'ensemble des états finals pour J1.
On pose :

- ▷ V_{2k+1} est l'ensemble des sommets x non finals de S_2 tels que si $x' \in S_1$ et est un successeur de x alors $x' \in Att_{2k}$;
- ▷ $Att_{2k+1} = Att_{2k} \cup V_{2k+1}$;
- ▷ V_{2k+2} est l'ensemble des sommets x de S_1 tels que s'il existe un successeur $x' \in S_2$ de x alors $x' \in Att_{2k+1}$;
- ▷ $Att_{2k+1} = Att_{2k} \cup V_{2k+1}$;
- ▷ $Att_{2k+2} = Att_{2k+1} \cup V_{2k+2}$.

L'attracteur de J1 est la réunion Att des ensembles Att_k (notons que c'est une réunion croissante et finie).
Le rang d'un sommet x de Att est le plus petit entier k tel que x soit dans Att_k.

L'attracteur de J1 est l'ensemble des positions gagnantes de J1.

En effet, par construction un élément de l'attracteur est gagnant. Réciproquement si x n'est pas dans l'attracteur et est contrôlé par J1 alors aucun de ses successeurs n'est dans l'attracteur, et si x est contrôlé par J2 et n'est pas dans l'attracteur alors il possède au moins un successeur qui n'est pas dans l'attracteur. Donc x n'est pas une position gagnante pour J1.

IV - Algorithme min-max

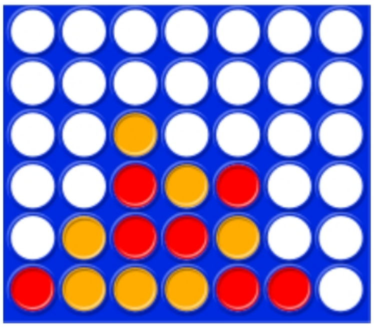
On suppose que l'on dispose d'une fonction h (une *heuristique*) qui à toute position p du jeu associe un réel de sorte que :

- plus $h(p)$ est grand, meilleure est la position pour J1 ;
- plus $h(p)$ est petit, meilleure est la position pour J2.

Exemple
Considérons l'exemple de Puissance 4 et choisissons d'attribuer à chaque case le nombre d'alignements possibles quand on place un pion dans cette case :

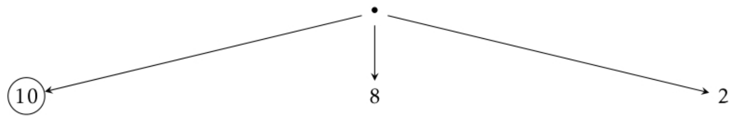
3	4	5	7	5	4	3
4	6	8	10	8	6	4
5	8	11	13	11	8	5
5	8	11	13	11	8	5
4	6	8	10	8	6	4
3	4	5	7	5	4	3

Disons que J1 joue avec les pions jaunes, la valeur d'une position pour J1 consiste à compter positivement les cases jaunes et négativement les cases rouges.



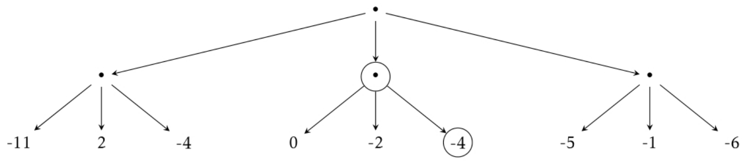
Cette position donne pour J1 : $4+5+7+6+8+13+11-3-5-4-8-10-11-11=2$.
Si la position est gagnante pour J1, on convient que l'heuristique vaut $+\infty$, et $-\infty$ si c'est une position gagnante pour J2.

Lorsque c'est au joueur J1 de jouer, il est *a priori* raisonnable de jouer le coup correspondant à l'heuristique maximale.

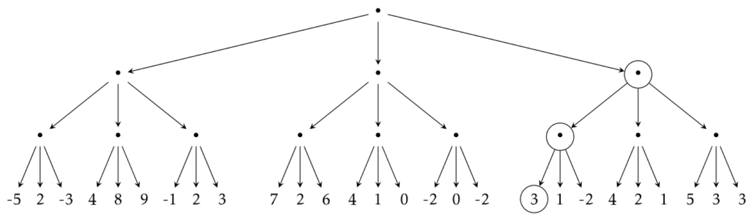


Dans cet exemple, J1 joue la possibilité de gauche.

Mais si l'on regarde le coup que pourra répondre J2, il convient en fait pour J1 de jouer le coup central :



On peut aussi tenir compte du coup suivant :

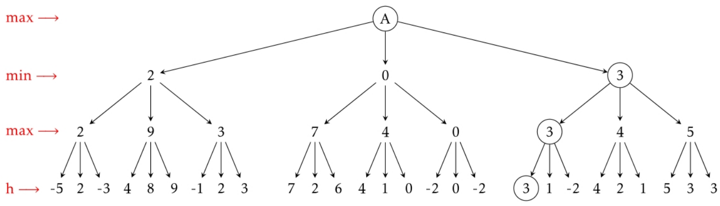


Le nombre de situations à examiner croît bien entendu trop rapidement pour envisager de regarder trop loin.

Le principe de l'algorithme min-max consiste donc à calculer la valeur de l'heuristique de toutes les positions que l'on peut atteindre en *n* coups.
On attribue ensuite à chaque nœud de l'arbre une valeur :

- ▷ si c'est un état contrôlé par J1, c'est le maximum des valeurs des sous-arbres ;
- ▷ si c'est un état contrôlé par J2, c'est le minimum des valeurs des sous-arbres.

Par exemple si c'est à J1 de jouer (A) :



Si c'est à J2 de jouer (E) :