Objectifs et savoir-faire

- *Fonctions d'une variable réelle :*
  - Justifier et exploiter la continuité, la dérivabilité d'une fonction ; étudier les variations et les limites d'une fonction.
  - Utiliser la continuité et la dérivabilité de façon globale (valeurs intermédiaires, fonction continue sur un segment, bijection strictement monotone, Rolle, accroissements finis).
  - Étudier des suites définies par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.
- *Intégration :*
  - Maîtriser les propriétés générales (positivité, croissance, linéarité).
  - Manipuler des inégalités avec des intégrales.
  - Calculer des primitives simples.
  - Intégrer par parties.

▸ Note aux colleurs :

- la formule de Leibniz a été vue mais aucun exercice n'a encore été fait ;
- l'intégration par changement de variable, les sommes de Riemann et la formule de Taylor avec reste intégral n'ont pas encore été abordées.

▸ Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :

1. Étudier la continuité des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} \quad \text{et} \quad g(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2.$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T−périodique (avec $T > 0$).
Montrer que si f a une limite en $+\infty$ alors f est constante.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 et en 1 et telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x^2)$.
Montrer que f est constante.

4. Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On suppose que $f(a) = g(b)$ et $f(b) = g(a)$.
Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

5. Soit f et g deux applications continues sur un intervalle $[a,b]$ et à valeurs réelles.
On suppose que : $\forall x \in [a,b],\ f(x) > g(x)$.
Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que : $\forall x \in [a,b],\ f(x) > g(x) + m$.

6. Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}.$$

7. Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$ et telle que :

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} f(a).$$

Montrer, en appliquant le théorème de Rolle à une fonction auxiliaire, qu'il existe un réel c tel que $f'(c) = 0$.

8. Soit u la suite réelle donnée par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \cos(u_n)$.

a. Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $\cos(\alpha) = \alpha$ et que l'on a $\alpha \in [0,1]$.
b. Justifier (brièvement) le fait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.
c. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \big(\sin(1)\big)^n$.
d. En déduire que la suite u converge vers α.

9. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on considère la fonction : $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x}$.
On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.
Montrer que la suite (u_n) est positive et décroissante puis qu'elle converge vers 0.

10. Montrer que, pour tout réel non nul x, on a :

$$\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

11. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, $I_n > 0$.
b. En intégrant par parties, montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a : $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.
c. Montrer que : $I_{2n} \sim I_{2n+1}$.