Objectifs et savoir-faire

- *Séries :*
  - Connaître les séries de référence : séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, série exponentielle $\sum \frac{x^n}{n!}$, séries géométriques $\sum x^n$ et les deux premières séries géométriques dérivées $\sum nx^{n-1}$ et $\sum n(n-1)x^{n-2}$.
  - Connaître les propriétés des séries convergentes.
  - Étudier la convergence d'une série (par le calcul des sommes partielles ou par utilisation d'une série de référence).
  - Calculer la somme d'une série convergente (par le calcul des sommes partielles ou par utilisation d'une série de référence de somme connue).
  - Utiliser, sur des exemples simples, la formule de Taylor avec reste intégral pour étudier la convergence d'une série et calculer sa somme.
  - Maîtriser les critères de comparaison ($0 \leqslant u_n \leqslant v_n$) et d'équivalence ($u_n \sim v_n$) pour les séries à termes positifs (et rédiger correctement leur utilisation).
  - Maîtriser le critère de négligeabilité ($u_n = o(v_n)$) pour une série à termes quelconques (et rédiger correctement son utilisation).
  - Connaître la notion de convergence absolue et son lien avec la convergence.

▸ Note aux colleurs :

- La notion de série alternée et le critère d'Alembert ne sont pas au programme.

▸ Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :

1. Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, on pose $M_1 = \max\{|f'(x)| \ ; \ a \leqslant x \leqslant b\}$ et :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ a_k = a + k\frac{b-a}{n}.$$

Montrer que :

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\right| \leqslant \frac{M_1(b-a)^2}{2n}.$$

2. Calculer la limite en $+\infty$ de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$.

3. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégrale, montrer que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ x - \frac{1}{6}x^3 \leqslant \sin(x) \leqslant x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5.$$

4. Étudier la nature des séries de terme général :

$$u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et } v_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

5. Étudier la nature des séries de terme général :

$$u_n = \frac{\big(\ln(n)\big)^2}{n^4} \text{ et } v_n = \frac{1}{n \times n^{\frac{1}{n}}}.$$

6. Étudier la nature des séries de terme général :

$$u_n = \frac{\cos(n)-\sin(n)}{n^2} \text{ et } v_n = \frac{(-1)^n\ln(n)}{n^2}.$$

7. Étudier la convergence et déterminer la somme des séries de terme général :

$$u_n = n\mathrm{e}^{-n} \text{ et } v_n = \frac{2^n}{(n+2)!}.$$

8. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$$

(il ne sera pas nécessaire de rédiger précisément la récurrence pour le calcul des dérivées successives de la fonction considérée).