Objectifs et savoir-faire

- *Révision sur les matrices*
  - Calculer des puissances de matrices (intuition et récurrence, binôme de Newton, utilisation d'un polynôme annulateur ou «diagonalisation guidée»).
  - Utiliser des puissances de matrices (notamment pour des systèmes de suites récurrentes).
- *Révision sur les polynômes*
  - Maîtriser le vocabulaire lié aux polynômes (degré, racines, ordre de multiplicité d'une racine,...).
  - Calculer avec des polynômes, notamment effectuer une division euclidienne.
  - Maîtriser la notion de racine d'un polynôme et le lien entre avec les notions de divisibilité et de factorisation.
  - Lier la notion de racine d'un polynôme avec celle de divisibilité et de factorisation.
- *Espace vectoriels*
  - Montrer qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel par la propriété de stabilité par combinaison linéaire ou à l'aide de la notation Vect.
  - Montrer, à l'aide d'un contre-exemple explicite, qu'une partie d'un espace vectoriel n'est pas un sous-espace vectoriel.
  - Maîtriser la notion de combinaison linéaire et la notation Vect ; notion de famille génératrice.
  - Constituer un « catalogue » d'espaces vectoriels de référence.
  - Montrer qu'une famille de vecteurs engendre un sous-espace vectoriel.
  - Montrer qu'une famille est libre / génératrice / une base.

► Note aux colleurs :

- Pour les polynômes : il n'y a pas de nombre complexes ; les espaces de (fonctions) polynômes sont notés $\mathbb{R}[x]$ et $\mathbb{R}_k[x]$; on s'autorise la notation x^k à la place de $x \mapsto x^k$.
- Tous les espaces vectoriels sont réels.
- Pas de sommes de s.e.v. pour le moment.
- La notion de dimension a à peine été abordée avant les vacances.

► Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :

1. Pour chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}^3$, montrer que c'est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ par deux méthodes (stabilité par combinaison linéaire et notation Vect) ou montrer que ce n'est pas le cas (en explicitant un contre-exemple à la définition) :
$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + y + z = 0\right\} \text{ et } G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ xy = 0\right\}.$$
2. Pour chacune des parties suivantes de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que c'est un s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ou montrer que ce n'est pas le cas (en explicitant un contre-exemple à la définition) :
$$F = \left\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ ; \ f \text{ impaire}\right\} \text{ et } G = \left\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ ; \ f \text{ s'annule}\right\}.$$
3. Pour chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}[x]$, montrer que c'est un s.e.v. de $\mathbb{R}[x]$ ou montrer que ce n'est pas le cas (en explicitant un contre-exemple à la définition) :
$$F = \left\{P \in \mathbb{R}[x] \ ; \ P(0) = 1\right\} \text{ et } G = \left\{P \in \mathbb{R}[x] \ ; \ x - 1 \text{ divise } P(x)\right\}.$$
4. Pour chacune des parties suivantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que c'est un s.e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou montrer que ce n'est pas le cas (en explicitant un contre-exemple à la définition) :
$$F = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ ; \ A \text{ triangulaire supérieure}\right\}$$
$$\text{et } G = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ ; \text{ les coefficients diagonaux de A sont tous nuls}\right\}.$$
5. On considère l'ensemble E des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont la somme des coefficients diagonaux est nulle. Montrer que c'est un s.e.v. de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par deux méthodes (stabilité par combinaison linéaire et notation Vect).