

**Objectifs et savoir-faire**► *Espaces vectoriels* :

- Réviser les notions abordées plus tôt dans l'année.
- Montrer qu'une famille est libre / génératrice / une base.
- Maîtriser le vocabulaire lié à la dimension finie.
- Utiliser les propriétés d'une base.
- Montrer que des sous-espaces sont supplémentaires.

► *Applications linéaires* :

- Étudier la linéarité d'une application entre espaces vectoriels.
- Déterminer noyau et image d'une application linéaire.
- Maîtriser la notion de projecteur sur un sous-espace vectoriel parallèlement à un autre.
- Maîtriser le lien entre applications linéaires et matrices.
- Utiliser le calcul matriciel pour obtenir des informations sur des applications linéaires.
- Utiliser des applications linéaires pour obtenir des résultats matriciels.
- Maîtriser les propriétés des applications linéaires en dimension finie (notamment le théorème du rang et le cas où les espaces de départ et d'arrivée ont même dimension).
- Connaître les formules de changement de base.

► **Note aux colleurs :**

- Tous les espaces vectoriels sont réels.
- Seul le cas de deux sous-espaces vectoriels en somme directe est désormais au programme (plus de somme directe de  $k \geq 3$  sous-espaces).
- Les symétries ne sont pas au programme de première année.
- La notion de rang n'a pas encore été abordée (mais le théorème du rang a été vu avec la dimension de l'image).
- Attention aux notations pour les espaces de (fonctions) polynômes  $\mathbb{R}[x]$  et  $\mathbb{R}_k[x]$  : on manipule  $x \mapsto x^k \dots$  à moins d'introduire des notations idoines dans l'exercice ! Mais, dans ce contexte, on peut parfois permettre des abus de notation du type  $x^k$  au lieu de  $x \mapsto x^k$ .

► **Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :**

1. On considère l'application  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  dans lui-même définie, pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , par :

$$f(x, y, z) = (-x + z, -y + z, x - 2y + z).$$

Montrer que  $f$  est linéaire puis déterminer des bases du noyau et de l'image de  $f$  (par la méthode de votre choix).

2. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3 et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$ . Déterminer une base du noyau et de l'image de l'endomorphisme  $f$  de  $E$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  canoniquement associée à :  $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -4 & 8 & 4 \\ 5 & -10 & -5 \end{pmatrix}$ .

Déterminer le noyau et l'image de  $f$  puis vérifier que  $f$  est un projecteur.

4. On considère une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $n + 1$  points  $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$  de l'intervalle  $[a, b]$ .

Montrer qu'il existe un unique polynôme  $P \in \mathbb{R}_n[x]$  tel que :  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(\alpha_i) = f(\alpha_i)$ .

5. Soit  $E = \mathbb{R}_2[x]$  et  $f$  l'application définie sur l'espace  $E$  par  $f(P) = P + P'$ .

- a. Prouver que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .
- b. Déterminer la matrice  $M$  de  $f$  dans la base canonique  $\mathcal{B}_0$  de  $E$ .
- c. Établir que  $f$  est une bijection et calculer  $M^{-1}$ .
- d. En déduire la solution  $P$  de  $P(x) + P'(x) = x^2 + x + 1$ .

6. Soit  $E$  un espace vectoriel et  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$  qui commutent. Montrer que  $\ker f$  et  $\text{Im } f$  sont stables par  $g$ .

7. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

Montrer que, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , on a :  $\ker f^i \subset \ker f^{i+1}$ .

En déduire qu'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que :  $\ker f^p = \ker f^{p+1}$ .