Objectifs et savoir-faire

- *Intégrales généralisées*
  - Connaître les intégrales de référence : intégrales de Riemann $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_a^b\frac{1}{(t-a)^\alpha}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b\frac{1}{(b-t)^\alpha}\mathrm{d}t$, intégrale d'une exponentielle $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t$.
  - Connaître les propriétés des intégrales convergentes.
  - Étudier la convergence d'une intégrale (par le calcul d'une intégrale sur un segment ou par utilisation d'une intégrale de référence).
  - Calculer une intégrale convergente.
  - Maîtriser les critères de comparaison et d'équivalence ($0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$ et $f(x)\underset{a}{\sim}g(x)$) pour les intégrales de fonctions positives et rédiger correctement leur utilisation.
  - Maîtriser le critère de négligeabilité ($f(x)=o(g(x))$) pour une intégrale de fonction «quelconque».
  - Connaître la notion de convergence absolue et son lien avec la convergence.
  - Maîtriser le théorème de changement de variable sur un intervalle $]a,b[$.

▸ **Note aux colleurs :**

- Les intégrations par parties ne doivent être réalisées que sur des segments sur lesquels les fonctions sont continues (avant de faire tendre une borne, ou les deux).

▸ **Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :**

1. Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^1\ln(t)\mathrm{d}t$ puis étudier celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$.

2. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^2\frac{1}{\sqrt{|t(t-1)(t-2)|}}\,\mathrm{d}t$.

3. À l'aide d'une intégration parties, montrer la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

4. On pose $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

a. Justifier que le domaine de définition de la fonction Γ est $]0,+\infty[$.

b. Déterminer une relation entre $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$.

5. On pose $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ pour tout $x>0$.

a. Pour tout $x>0$, déterminer une relation entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$.

b. En déduire l'expression de $\Gamma(n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

6. Pour tout x et y réels strictement positifs, on pose :

$$\mathrm{B}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t.$$

a. Prouver la convergence de l'intégrale définissant $\mathrm{B}(x,y)$.

b. Démontrer que, pour tous $x>0$ et $y>0$, on a : $\mathrm{B}(x,y)=\mathrm{B}(y,x)$.

c. Démontrer que, pour tous $x>0$ et $y>0$, on a : $\mathrm{B}(x+1,y)=\frac{x}{y}\mathrm{B}(x,y+1)$.