CHAPITRE I

CORRECTION D'EXERCICES

Exercice C-5

Déterminer les valeurs du réel a afin que les vecteurs $\mathbf{u}_1 = (0,1,1,1)$, $\mathbf{u}_2 = (1,0,1,1)$, $\mathbf{u}_3 = (1,1,0,1)$ et $\mathbf{u}_4 = (1,1,1,a)$ forment une base de $\mathbb{R}^4$.

Considérons un vecteur $\mathbf{x} = (\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ de $\mathbb{R}^4$ et une relation :

$$\star : \ \mathbf{x}_1 = \lambda_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \cdot \mathbf{u}_3 + \lambda_4 \cdot \mathbf{u}_4$$

où les λ_i sont des réels. On a alors :

$$\begin{aligned}
\star &\iff (\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \lambda_1 \cdot (0,1,1,1) + \lambda_2 \cdot (1,0,1,1) + \lambda_3 \cdot (1,1,0,1) + \lambda_4 \cdot (1,1,1,a) \\
&\iff (\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \big(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4, \lambda_1+\lambda_3+\lambda_4, \lambda_1+\lambda_2+\lambda_4, \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+a\lambda_4\big) \\
&\iff \big\{\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = \alpha\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4 = \beta\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4 = \gamma\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+a\lambda_4 = \delta \quad .
\end{aligned}$$

Considérons la matrice augmentée A de ce système :

$$\begin{aligned}
A = &\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \gamma \\ 1 & 1 & 1 & a & \delta \end{array}\right) \\
\underset{L}{\sim} &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & \beta \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \gamma \\ 1 & 1 & 1 & a & \delta \end{array}\right) \\
\underset{L}{\sim} &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & \beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha-\beta \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \gamma-\beta \\ 0 & 1 & 0 & a-1 & \delta-\beta \end{array}\right) \\
\underset{L}{\sim} &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & \beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha-\beta \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \gamma-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & \delta-\alpha \end{array}\right)
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit qu'il existe un unique quadruplet $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ si et seulement si $a = 1$.
Donc $(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ si et seulement si $a = 1$.

Exercice C-6

On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x+2y-z=0\} \ , \ \ \mathrm{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x+y+z=0\}$$

$$\text{et } \ \mathrm{G} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ y=0\}.$$

1. Montrer que E, F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.
2. Justifier que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base : $\mathrm{E}\cap\mathrm{F}$, $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}$, $\mathrm{E}\cap\mathrm{G}$ et $\mathrm{E}\cap\mathrm{F}\cap\mathrm{G}$.

1. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in \mathrm{E} &\iff z = x+2y \\ &\iff (x,y,z) = x\cdot(1,0,1) + y\cdot(0,1,2).\end{aligned}$$

Donc E est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1,0,1)$ et $(0,1,2)$. De plus, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre or ils engendrent E donc ils forment une base de E.

On a :

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in \mathrm{F} &\iff z = -x-y \\ &\iff (x,y,z) = x\cdot(1,0,-1) + y\cdot(0,1,-1).\end{aligned}$$

Donc F est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1,0,-1)$ et $(0,1,-1)$. De plus, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre or ils engendrent F donc ils forment une base de F.

Enfin, on a :

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in \mathrm{G} &\iff y = 0 \\ &\iff (x,y,z) = x\cdot(1,0,0) + z\cdot(0,0,1).\end{aligned}$$

Donc G est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1,0,0)$ et $(0,0,1)$. De plus, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre or ils engendrent G donc ils forment une base de F.

2. Tous ces ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ puisque ce sont des intersections de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in \mathrm{E}\cap\mathrm{F} &\iff \begin{cases} x+2y-z=0 \\ x+\ \ y+z=0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x+2y-\ \ z=0 \\ \quad -\ \ y+2z=0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \qquad +3z=0 \\ \quad -y+2z=0 \end{cases} \\ &\iff (x,y,z) = (-3z, 2z, z) \\ &\iff (x,y,z) = z\cdot(-3,2,1).\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{E}\cap\mathrm{F}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $(-3,2,1)$.

On a :

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in \mathrm{F}\cap \mathrm{G} &\iff \begin{cases} x+y+z=0\\ \quad y \quad\ =0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} x \quad +z=0\\ \ -y \quad =0\end{cases}\\ &\iff (x,y,z)=(-z,0,z)\\ &\iff (x,y,z)=z\cdot(-1,0,1).\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $(-1,0,1)$.

On a :

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in \mathrm{E}\cap \mathrm{G} &\iff \begin{cases} x+2y-z=0\\ \qquad y \quad\ =0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} x \quad -z=0\\ \quad y \quad =0\end{cases}\\ &\iff (x,y,z)=(z,0,z)\\ &\iff (x,y,z)=z\cdot(1,0,1).\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{E}\cap\mathrm{G}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $(1,0,1)$.

Compte tenu des deux résultats précédents, on a :

$$\mathrm{E}\cap\mathrm{F}\cap\mathrm{G}=\{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}.$$

Exercice C-7

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\mathbf{u}=(1,2,3)$, $\mathbf{v}=(2,-1,1)$, $\mathbf{a}=(1,0,1)$ et $\mathbf{b}=(0,1,1)$. Montrer que $\mathrm{Vect}(\mathbf{u},\mathbf{v})=\mathrm{Vect}(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

On a :

$$\mathbf{u}=\mathbf{a}+2\cdot\mathbf{b}\in\mathrm{Vect}(\mathbf{a},\mathbf{b}),$$

$$\mathbf{v}=2\cdot\mathbf{a}+(-1)\cdot\mathbf{b}\in\mathrm{Vect}(\mathbf{a},\mathbf{b}),$$

donc $\mathrm{Vect}(\mathbf{u},\mathbf{v})\subset\mathrm{Vect}(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

D'autre part, les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre or ils engendrent $\mathrm{Vect}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ donc ils forment une base de cet espace, d'où :

$$\dim\Big(\mathrm{Vect}(\mathbf{u},\mathbf{v})\Big)=2.$$

De même, les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre or ils engendrent $\mathrm{Vect}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ donc ils forment une base de cet espace, d'où :

$$\dim\Big(\mathrm{Vect}(\mathbf{a},\mathbf{b})\Big)=2.$$

On en déduit :

$$\mathrm{Vect}(\mathbf{u},\mathbf{v})=\mathrm{Vect}(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

Exercice C-11

Montrer la linéarité des applications suivantes puis déterminer le noyau et l'image.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (2x-y, x+y, x)$;

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto (x, 2x, x)$;

3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto x+y+2z$;

4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto (2x+3y, x-z, 3x)$.

5. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x,y) \mapsto (x-y, y-x, 0)$

6. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (x-y, y-z, z-x)$

7. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, (x,y,z) \mapsto (x+z, y-z, x+y+z, x-y-z)$

8. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (x-y, y+z, x+y+z)$

9. $f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \mathrm{P}(x) \mapsto x^2\mathrm{P}'(x)$

1. Soit $\mathbf{u} = (x,y)$ et $\mathbf{v} = (x',y')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(\lambda\cdot\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= f(\lambda x + x', \lambda y + y') \\ &= \Big(2(\lambda x + x') - (\lambda y + y'), (\lambda x + x') + (\lambda y + y'), (\lambda x + x') - (\lambda y + y')\Big), \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} f(\lambda\cdot\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= \lambda\cdot(2x-y, x+y, x) + (2x'-y', x'+y', x') \\ &= \lambda\cdot f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$.

La matrice de f dans les base canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ est $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Les deux colonnes ne sont pas proportionnelles donc $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 2$ d'où, par le théorème du rang, $\ker(f) = \{(0,0)\}$.

Comme $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2, on obtient que :

$$\Big((2,1,1), (-1,1,0)\Big)$$

est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

2. La linéarité est claire et la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^3$ est :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\Big((1,2,1)\Big)$.

D'autre part, on a :

$$f(x) = 0 \iff x = 0$$

donc $\ker(f) = \{0\}$.

3. Il s'agit d'une forme linéaire non nulle donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

D'autre part, on a $(x,y,z) \in \ker(f)$ si et seulement si :

$$x = -y - 2z,$$

ce qui équivaut à :

$$(x,y,z) = y\cdot(-1,1,0) + z\cdot(-2,0,1).$$

On en déduit que $\Big((-1,1,0), (-2,0,1)\Big)$ est une famille génératrice de $\ker(f)$ or le théorème du rang assure que le noyau est de dimension 2 donc il s'agit d'une base du noyau.

4. La relation :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ x-z \\ 3x \end{pmatrix},$$

assure que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3,$$

donc f est bijective et on a :

$$\ker(f) = \{(0,0,0)\} \text{ et } \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3.$$

5. Soit $\mathrm{X} = (x,y)$ et $\mathrm{X}' = (x',y')$ dans $\mathbb{R}^2$ et λ un réel, alors :

$$\begin{aligned} f(\lambda \cdot \mathrm{X} + \mathrm{X}') &= f(\lambda x + x', \lambda y + y') \\ &= \big((\lambda x + x') - (\lambda y + y'), (\lambda y + y') - (\lambda x + x'), 0\big) \\ &= \lambda \cdot (x-y, y-x, 0) + (x'-y', y'-x', 0) \\ &= \lambda \cdot f(\mathrm{X}) + f(\mathrm{X}'), \end{aligned}$$

donc f est linéaire.

On a $\mathrm{X} \in \ker(f)$ si et seulement si :

$$(x-y, y-x, 0) = (0,0,0),$$

soit $x = y$. Donc :

$$\ker(f) = \mathrm{Vect}\big((1,1)\big).$$

D'autre part :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(1,0), f(0,1)\big),$$

donc :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big((1,-1,0), (-1,1,0)\big),$$

soit :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big((1,-1,0)\big).$$

6. Pour varier les méthodes, on peut remarquer que :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ z-x \end{pmatrix},$$

donc f est linéaire et sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée ce-dessus.

De plus la somme des colonnes est nulle donc $(1,1,1)$ est un vecteur du noyau et, les deux premières colonnes par exemple étant indépendantes, le rang est au minimum égal à 2. Il s'ensuit que $\ker(f)$ est de dimension 1 est engendré par le vecteur $(1,1,1)$ et $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2 engendrée par :

$$f(1,0,0) = (1,0,-1) \text{ et } f(0,1,0) = (-1,1,0).$$

7. Comme ci-dessus, f est linéaire et sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les opérations $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$ donnent :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

puis les opérations $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 + L_2$ donnent :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3.$$

On en déduit par le théorème du rang que $\ker(f)$ est de dimension nulle c'est-à-dire :

$$\ker(f) = \{(0,0,0)\}.$$

L'image de f est de dimension 3 est :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\Big(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\Big),$$

soit :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\Big((1,0,0,0), f(0,1,0,0), f(1,-1,1,-1)\Big),$$

8. Comme ci-dessus, f est linéaire et sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ donne :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

puis l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ donne :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3.$$

Il s'ensuit que A est inversible donc f est bijective et :

$$\ker(f) = \{(0,0,0)\} \text{ et } \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3.$$

9. Soit P et Q dans $\mathbb{R}[x]$ et λ réel, alors :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q)(x) &= x^2(\lambda P + Q)'(x) \\ &= x^2(\lambda P' + Q')(x) \\ &= \lambda(x^2 P'(x)) + x^2 Q'(x) \\ &= \lambda f(P)(x) + f(Q)(x) \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q),$$

donc f est linéaire.
Soit $P \in \mathbb{R}[x]$, on a $P \in \ker(f)$ lorsque :

$$x^2 P'(x) = 0_{\mathbb{R}[x]},$$

c'est-à-dire $P' = 0_{\mathbb{R}[x]}$ donc le noyau de f est constitué des polynômes constants : $\ker(f) = \mathrm{Vect}(1)$.
Pour déterminer l'image, on remarque qu'une relation $f(P) = Q$, soit $x^2P'(x) = Q(x)$ montre que $Q(x)$ est divisible par x^2. Inversement, si Q s'écrit :

$$Q(x) = x^2(q_0 + q_1x + \cdots + q_dx^d),$$

alors :

$$Q(x) = x^2(q_0x + q_1\frac{1}{2}x^2 + \cdots + q_d\frac{1}{d+1}x^{d+1})',$$

donc $Q \in \mathrm{Im}(f)$. Donc $\mathrm{Im}(f)$ est consituée des polynômes divisibles par x^2.

Exercice C-12

On considère une base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer une base du noyau et une base de l'image de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

En notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes, on remarque que :

$$C_1 + C_2 - 2C_3 = 0$$

donc $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 \in \ker(f)$.
D'autre part, les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles donc (avec le théorème du rang) :

$$\dim(\ker(f)) = 1 \text{ et } \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2.$$

Une base de $\mathrm{Im}(f)$ est donnée par les deux premières colonnes de A :

$$\big(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3\big).$$

Exercice C-13

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à la matrice : $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -4 & 8 & 4 \\ 5 & -10 & -5 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le noyau et l'image de f.

2. Montrer que $f \circ f = f$.

1. En notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes, on remarque que :

$$2C_1 + C_2 = 0 \text{ et } C_1 + C_3 = 0$$

donc $(2, 1, 0)$ et $(1, 0, 1)$ sont dans $\ker(f)$ et on remarque qu'ils sont linéairement indépendants.
Les trois colonnes étant proporitionnelles et non nulles, la matrice A est de rang 1 donc les deux vecteurs précédents forment une base du noyau et l'image est engendrée par $(2, 4, -5)$.

2. On calculer A^2 et on trouve :

$$A^2 = A,$$

ce la signifie que $f \circ f = f$.

Exercice C-14

On considère l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ donnée par :

$$f(x,y,z) = (-x+z, -y+z, x-2y+z).$$

1. Déterminer le noyau et l'image puis vérifier que : $\ker(f) \subset \operatorname{Im}(f)$.
2. Calculer $(f \circ f)(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
3. En déduire l'image et le noyau de $f \circ f$.

1. Pour diversifier les exemples de raisonnements, on change de type de rédaction par rapport aux exercices précédents.

Un vecteur $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ est dans $\ker(f)$ si et seulement si :

$$f(x,y,z) = (0,0,0),$$

ce qui équivaut successivement à :

$$(-x+z, -y+z, x-2y+z) = (0,0,0),$$

$$\begin{cases} -x \quad\quad + z = 0 \\ \quad - \ y + z = 0 \\ \ x - 2y + z = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} -x \quad\quad + \ z = 0 \\ \quad - \ y + \ z = 0 \\ \quad - 2y + 2z = 0 \end{cases},$$

soit $x = y = z$, ce sui signifie :

$$(x,y,z) = x \cdot (1,1,1).$$

Donc $\ker(f)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,1,1)$.

D'autre part, l'image de f est engendrée par :

$$f(1,0,0), f(0,1,0) \text{ et } f(0,0,1),$$

soit :

$$(-1,0,1), (0,-1,-2) \text{ et } (1,1,1).$$

La somme de ces trois vecteurs est nulle donc ils sont liés. De plus, les deux premiers ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre et on en déduit qu'ils forment une base de l'image.

2. Considérons la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

$$(f \circ f)(x,y,z) = \big(2(x-y), x-y, 0\big).$$

3. La matrice A^2 est de rang 1, sa dernière colonne de A^2 est nulle et la somme des deux premières également donc $(1,1,0)$ et $(0,0,1)$ sont dans le noyau de f. Le noyau étant de dimension 2 par le théorème du rang et ces deux vecteurs étant indépendants, ils forment une base du noyau :

$$\mathrm{Im}(f \circ f) = \mathrm{Vect}\big((2,1,0)\big),$$

$$\ker(f \circ f) = \mathrm{Vect}\big((1,1,0),(0,0,1)\big).$$

Exercice C-15

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ deux applications linéaires.

1. Montrer que $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.

2. En déduire que si $g \circ f$ est un isomorphisme alors f est injective et g est surjective.

3. On suppose que $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$, montrer que :

$$\ker(h) = \ker(h \circ h) \iff \mathrm{Im}(h) = \mathrm{Im}(h \circ h).$$

1. Soit $\mathbf{x} \in \ker(f)$, on a :

$$g\big(f(\mathbf{x})\big) = g(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}$$

donc $\mathbf{x} \in \ker(g \circ f)$, d'où l'inclusion.

Soit $\mathbf{y} \in \mathrm{Im}(g \circ f)$, on écrit $\mathbf{y} = (g \circ f)(\mathbf{x})$ avec $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, alors :

$$\mathbf{y} == g\big(f(\mathbf{x})\big) \in \mathrm{Im}(g),$$

d'où l'inclusion.

2. Si $g \circ f$ est bijective alors $g \circ f$ est injective et surjective d'où :

$$\ker(g \circ f) = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\} \text{ et } \mathrm{Im}(g \circ f) = \mathbb{R}^m.$$

On en déduit :

$$\ker(f) \subset \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\} \text{ et } \mathbb{R}^m \subset \mathrm{Im}(g)$$

et les autres inclusions étant évidentes, on a :

$$\ker(f) = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\} \text{ et } \mathbb{R}^m = \mathrm{Im}(g)$$

donc f est injective et g est surjective.

3. $\diamond$ Supposons tout d'abord que :

$$\ker(h) = \ker(h \circ h).$$

D'après ce qui précède, on a toujours :

$$\mathrm{Im}(h \circ h) \subset \mathrm{Im}(h).$$

L'hypothèse donne :

$$\dim(\ker(h)) = \dim(\ker(h \circ h)),$$

et le théorème du rang permet d'en déduire :

$$\dim(\mathrm{Im}(h)) = \dim(\mathrm{Im}(h \circ h)),$$

L'inclusion plus cette égalité des dimensions donne :

$$\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Im}(h \circ h).$$

◇ La réciproque est analogue. On suppose que :

$$\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Im}(h \circ h).$$

D'après ce qui précède, on a toujours :

$$\ker(h) \subset \ker(h \circ h).$$

L'hypothèse donne :

$$\dim(\mathrm{Im}(h)) = \dim(\mathrm{Im}(h \circ h)),$$

et le théorème du rang permet d'en déduire :

$$\dim(\ker(h)) = \dim(\ker(h \circ h)),$$

L'inclusion plus cette égalité des dimensions donne :

$$\ker(h) = \ker(h \circ h).$$

Exercice C-16

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à la matrice :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 2 & 0 & c \\ d & 1 & e \end{pmatrix},$$

où $a,\ b,\ c,\ d$ et e sont des réels.
Déterminer les coefficients de A de sorte que :

$$(1,0,1) \in \ker(f) \ \text{ et } \ \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\Big((1,0,1),(0,1,0)\Big).$$

On a $(1,0,1) \in \ker(f)$ si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 2 & 0 & c \\ d & 1 & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

soit : $1 + b = 0$, $2 + c = 0$ et $d + e = 0$. La première condition induit donc la forme suivante pour A :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ d & 1 & -d \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de cette matrice donnent :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\Big((1,2,d),(a,0,1)\Big).$$

Les vecteurs $(0,1,0)$ et $(1,0,1)$ sont dans $\mathrm{Im}(f)$ si seulement si on peut écrire des relations :

$$(0,1,0) = \alpha \cdot (1,2,d) + \beta \cdot (a,0,1),$$

$$(1,0,1) = \gamma \cdot (1,2,d) + \delta \cdot (a,0,1),$$

ce qui conduit facilement à $a = 1$ et $d = 1$.
Réciproquement, la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

vérifie bien les conditions demandées.

Exercice C-23

On considère une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ et $n+1$ points $\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_n$ de l'intervalle $[a,b]$.

1. En considérant l'application :

$$\varphi:\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}^{n+1}, \mathrm{P}\mapsto\Big(\mathrm{P}(\alpha_0),\mathrm{P}(\alpha_1),\cdots,\mathrm{P}(\alpha_n)\Big),$$

montrer qu'il existe un unique polynôme $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_n[x]$ tel que pour tout entier i compris entre 0 et n, $\mathrm{P}(\alpha_i)=f(\alpha_i)$.

$$\forall i\in[\![0,n]\!],\ \mathrm{P}(\alpha_i)=f(\alpha_i).$$

2. On considère désormais que f est dérivable.
Montrer qu'il existe un unique polynôme $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_{2n+1}[x]$ tel que :

$$\forall i\in[\![0,n]\!],\ \mathrm{P}(\alpha_i)=f(\alpha_i)\text{ et }\mathrm{P}'(\alpha_i)=f'(\alpha_i).$$

Pour la seconde partie, on considère :

$$\psi:\mathbb{R}_{2n+1}[x]\to\mathbb{R}^{2n+2},$$

donnée par :

$$\psi(\mathrm{P})=\Big(\mathrm{P}(\alpha_0),\mathrm{P}'(\alpha_0),\ldots,\mathrm{P}(\alpha_n),\mathrm{P}'(\alpha_n)\Big).$$

La linéarité de l'évaluation :

$$\mathrm{P}\mapsto\mathrm{P}(\alpha_i),$$

et la linéarité de la dérivation :

$$\mathrm{P}\mapsto\mathrm{P}',$$

induisent la linéarité de ψ. De plus, un polynôme P de $\mathbb{R}_{2n+1}[x]$ est dans le noyau de ψ lorsque, pour tout $i\in[\![0,n]\!]$:

$$\mathrm{P}(\alpha_i=0\text{ et }\mathrm{P}'(\alpha_i=0,$$

ce qui signifie que α_i est une racine d'ordre au moins 2 de P. Puisque tous les α_i sont supposés distincts, P admet au moins $2n+2$ racines comptées avec leur multiplicité or le degré de P est au plus $2n+1$ donc P est le polynôme nul donc :

$$\ker\psi\{0_{\mathbb{R}_{2n+1}[x]}\},$$

et ψ est injective.

Puisque $\mathbb{R}_{2n+1}[x]$ et $\mathbb{R}^{2n+2}$ ont la même dimension finie (égale à $2n+2$), l'application ψ est bijective. En particulier pour l'élément suivant de $\mathbb{R}^{2n+2}$:

$$\mathrm{Y}=\Big(f(\alpha_0),f'(\alpha_0),\ldots,f(\alpha_n),f'(\alpha_n)\Big),$$

il existe un unique P de $\mathbb{R}_{2n+1}[x]$ tel que :

$$\psi(\mathrm{P})=\mathrm{Y},$$

c'est-à-dire que, pour tout $i\in[\![0,n]\!]$:

$$\mathrm{P}(\alpha_i)=f(\alpha_i)\text{ et }\mathrm{P}'(\alpha_i)=f'(\alpha_i).$$

Exercice C-25

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E.
On suppose que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ mais que $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ *i.e.* il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$.
Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de E puis écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Considérons des réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ tels que :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0_E.$$

Si tous les λ_i ne sont pas nuls alors on peut considérer le plus petit entier $r \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\lambda_i \neq 0$.
Cela conduit à :

$$\sum_{i=r}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0_E.$$

On applique la fonction $f^{n-1-r)}$, d'où :

$$\lambda_r f^{n-1}(x_0) + \lambda_{r+1} f^n(x_0) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{2n-2-r}(x_0) = 0_E$$

or $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$ donc $\lambda_r = 0$ ce qui est absurde par choix de r.
Donc $\mathcal{B}$ est une famille libre or elle est constituée de n vecteurs dans E et E est de dimension n donc $\mathcal{B}$ est une base de E.

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$