CHAPITRE

I

ALGÈBRE LINÉAIRE

Sommaire

A Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels 2
A.1 Définitions et exemples 2
A.2 Propriétés des familles de vecteurs, dimension 4
A.3 Opérations sur les sous-espaces vectoriels 8
A.4 Bilan des problématiques et savoir-faire fondamentaux 11
B Applications linéaires et matrices 22
B.1 Définitions et exemples 22
B.2 Utilisation de l'outil matriciel 28
B.3 Changement de bases 32
B.4 Rang d'une matrice 36
B.5 Bilan des problématiques et savoir-faire fondamentaux 37

A - Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

A.1 - Définitions et exemples

► On rappelle qu'un ***espace vectoriel*** est un ensemble E muni de deux opérations «+» et «·» telles que :

- E soit stable par multiplication à gauche par un nombre réel : $\forall x \in \mathrm{E},\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \cdot x \in \mathrm{E}$;
- E soit stable par somme : $\forall x \in \mathrm{E}, \forall y \in \mathrm{E},\ x + y \in \mathrm{E}$;
- ces opérations respectent de «bonnes» règles de calcul :
  - ***i.*** $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2,\ x + y = y + x$ (commutativité);
  - ***ii.*** $\forall (x,y,z) \in \mathrm{E}^3,\ (x+y)+z = x+(y+z)$ (associativité);
  - ***iii.*** il existe un (unique) élément noté 0_E de E tel que, pour tout $x \in \mathrm{E}$, $x + 0_\mathrm{E} = x$ (on dit que 0_E est l'élément neutre de l'addition);
  - ***iv.*** pour tout $x \in \mathrm{E}$, il existe un (unique) élément $y \in \mathrm{E}$ tel que $x + y = 0_\mathrm{E}$ (on dit que y est l'opposé de x et est noté $-x$);
  - ***v.*** $\forall x \in \mathrm{E},\ 1 \cdot x = x$;
  - ***vi.*** $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in \mathrm{E}^2,\ \alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;
  - ***vii.*** $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathrm{E},\ (\alpha+\beta)\cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;
  - ***viii.*** $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathrm{E},\ \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta)\cdot x$.

Les éléments de E sont appelés ***vecteurs***.

Exemples fondamentaux

1 ▹ L'ensemble $\vec{\mathcal{P}}$ des vecteurs du plan est un espace vectoriel.

2 ▹ L'ensemble $\vec{\mathcal{E}}$ des vecteurs de l'espace est un espace vectoriel.

3 ▹ L'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel pour les lois données par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f \oplus g)(x) = f(x) + g(x) \ \text{ et } \ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ (\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x).$$

4 ▹ L'ensemble $\mathbb{R}^n$ des n-uplets de réels est un espace vectoriel pour les lois données par :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \dots, x_n + x'_n) \ \text{ et } \ \alpha \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

En particulier $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.

5 ▹ L'ensemble $\mathbb{R}[x]$ des polynômes est un espace vectoriel pour l'addition des polynômes et l'opération donnée par :

$$\alpha \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha a_k) x^k.$$

6 ▹ L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes, p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel pour les lois données par :

$$\left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} + \left(b_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} = \left(a_{i,j} + b_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \ \text{ et } \ \alpha \cdot \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} = \left(\alpha a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}.$$

► Si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ sont des vecteurs de E alors on appelle ***combinaison linéaire*** des vecteurs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ toute vecteur de E de la forme :

$$\lambda_1.\mathbf{u}_1 + \lambda_2.\mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_k.\mathbf{u}_k$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sont des réels.

On note $\mathrm{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$.

► On dit qu'une partie F de E est un ***sous-espace vectoriel de*** E (s.e.v.) lorsque F est non vide et :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in F^2,\ x+y \in F \text{ et } \lambda.x \in F,$$

ce qui équivaut à :

$$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (x,y) \in F^2,\ \lambda.x+\mu.y \in F.$$

ou encore à :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in F^2,\ \lambda.x+y \in F.$$

Cela revient à dire qu'un s.e.v. de E est une partie non vide de E, stable pour + et · et cela induit qu'un sous-espace vectoriel de E est *a fortiori* un espace vectoriel.

Exemples

1 ▹ Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ x+z = 0\right\}$.

En effet, l'ensemble F est une partie de E et on a $F \neq \emptyset$ puisque $(0,0,0) \in F$.

Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(X,Y) \in F^2$, on écrit $X = (x,y,z)$ et $Y = (x',y',z')$ alors :

$$\lambda.X+\mu.Y = \lambda.(x,y,z)+\mu.(x',y',z') = (\lambda.x+\mu.x', \lambda.y+\mu.y', \lambda.z+\mu.z')$$

puis on effectue la somme de la première et de la troisième composantes de $\lambda.X+\mu.Y$ pour vérifier s'il s'agit bien d'un élément de F :

$$\left(\lambda.x+\mu.x'\right)+\left(\lambda.z+\mu.z'\right) = \lambda.(\underbrace{x+z}_{=0 \text{ car } X\in F})+\mu.(\underbrace{x'+z'}_{=0 \text{ car } Y\in F}) = 0$$

donc $\lambda.X+\mu.Y \in F$ *i.e.* F est bien un s.e.v. de E.

2 ▹ Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ x \geqslant z\right\}$.

Pour $\mathbf{u} = (1,0,0)$ et $\lambda = -1$, on a $\mathbf{u} \in F$ mais $\lambda.\mathbf{u} \notin F$ donc F n'est pas un s.e.v. de E.

3 ▹ L'ensemble $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est un s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

En effet, $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est bien une partie de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, qui est non vide (la fonction nulle, par exemple, est continue).

Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f,g) \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})^2$ alors la fonction $\lambda.f+\mu.g$ est continue donc $\lambda.f+\mu.g \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

4 ▹ L'ensemble $\mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est un s.e.v. de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

5 ▹ Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{R}_n[x]$ des polynômes de degré au plus n est un s.e.v. de $\mathbb{R}[x]$.

6 ▹ Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $F = \{f \in E; f(0) = 2\}$.

L'élément neutre pour l'addition dans E est la fonction nulle mais celle-ci n'appartient pas à F donc F n'est pas un s.e.v. de E.

7 ▹ Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et F l'ensemble des matrices symétriques de E.

L'ensemble F est une partie de E non vide puisque, par exemple, la matrice nulle est symétrique.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(A,B) \in F^2$ alors :

$$^t(\lambda.A+B) = \lambda.{}^tA+{}^tB$$

or A et B sont des éléments de F donc sont symétriques ce qui signifie que ${}^tA = A$ et ${}^tB = B$, d'où :

$$^t(\lambda.A+B) = \lambda.A+B$$

ce qui montre que la matrice $\lambda.A+B$ est symétrique *i.e.* $\lambda.A+B \in F$.

Donc F est un sous-espace vectoriel de E.

Il en est de même avec l'ensemble des matrices antisymétriques de E (*i.e.* les matrices A vérifiant ${}^t\mathrm{A} = -\mathrm{A}$).

8 ▹ Les ensembles $\{0_{\mathrm{E}}\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E appelés les *sous-espaces vectoriels triviaux* de E.

9 ▹ Si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ sont des vecteurs de E alors l'ensemble $\mathrm{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k)$ des combinaisons linéaires de ces vecteurs est un sous-espace vectoriel de E appelé le ***sous-espace vectoriel de* E *engendré par les vecteurs*** $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$.

En particulier, dans le cas d'un seul vecteur $\mathbf{u}$, le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\mathbf{u})$ est appelé la ***droite vectorielle*** engendrée par $\mathbf{u}$ ou ***de vecteur directeur*** $\mathbf{u}$.

Par exemple dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

10 ▹ Dans $\mathbb{R}[x]$, si $n \in \mathbb{N}$ alors on note $\mathbb{R}_n[x]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$ engendré par les polynômes :

$$x \mapsto 1,\ x \mapsto x,\ \ldots, x \mapsto x^n.$$

Il s'agit donc des polynômes de degré au plus n.

A.2 - Propriétés des familles de vecteurs, dimension

Dans toute cette section, E désigne un espace vectoriel.

► Soit F un sous-espace vectoriel de E et $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ des vecteurs de F.

On dit que $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k)$ est une ***famille génératrice de*** F lorsque $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_k)$ c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathrm{F},\ \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k / x = \lambda_1.x_1 + \lambda_2.x_2 + \cdots + \lambda_k.x_k.$$

On dit aussi que $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ engendrent F.

Exemples

1 ▹ Si D est une droite vectorielle et si $x \in \mathrm{D} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}$ alors (x) est une famille génératrice de D.

2 ▹ Dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, une famille génératrice est constituée par la famille des matrices $\mathrm{E}_{i,j}$, pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$, dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à la place (i,j) qui vaut 1.

Par exemple, une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est obtenue avec les matrices :

$$\mathrm{E}_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{E}_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{E}_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{E}_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarques

1 ▹ Si l'on ajoute des vecteurs à une famille génératrice alors la famille est toujours génératrice.

2 ▹ Si $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k)$ est une famille génératrice de F et si, pour un $i \in [\![1,n]\!]$, on peut écrire :

$$\mathbf{u}_i = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \lambda_{i-1}\mathbf{u}_{i-1} + \lambda_{i+1}\mathbf{u}_{i+1} + \cdots + \lambda_k \mathbf{u}_k$$

alors la famille $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{u}_{i+1}, \ldots, \mathbf{u}_k)$ engendre toujours F.

Cela signifie que, si dans une famille génératrice certains vecteurs s'expriment en fonction des autres alors on peut les retirer et la famille obtenue est toujours une famille génératrice.

► Soit $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ des vecteurs de E.

On dit que $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$ est une ***famille libre*** lorsque :

$$\forall(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k, \Big(\lambda_1.\mathbf{u}_1 + \lambda_2.\mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_k.\mathbf{u}_k = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0\Big).$$

On dit aussi que $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ sont ***linéairement indépendants***.

Si $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ n'est pas libre alors on dit que $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ est une ***famille liée***.

Cela signifie que l'on peut écrire une combinaison linéaire nulle dont les coefficients ne sont pas tous nuls c'est-à-dire :

$$\lambda_1.\mathbf{u}_1 + \ldots + \lambda_k.\mathbf{u}_k = 0_E \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \neq (0, \dots, 0).$$

Une telle relation est appelée une *relation de dépendance linéaire*.

Exemples

1 ▹ Soit $E = \mathbb{R}^3$, on pose $X = (1,1,0)$, $Y = (1,0,0)$ et $Z = (2,1,0)$.

On a $1.X + 1.Y + (-1).Z = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc la famille (X, Y, Z) est liée.

Cependant, considérons $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda.X + \mu.Y = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Alors $\lambda.(1,1,0) + \mu.(1,0,0) = (0,0,0)$ *i.e.* $(\lambda + \mu, \lambda, 0) = (0,0,0)$ d'où $\lambda = 0$ et $\mu = 0$.

Donc la famille (X, Y) est libre.

2 ▹ Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère les deux fonctions :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = e^x \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = e^{2x} \end{array}.$$

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda.f + \mu.g = 0_E$ c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \lambda f(x) + \mu g(x) = 0 \quad i.e. \quad \lambda e^x + \mu e^{2x} = 0.$$

En simplifiant par e^x, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \lambda + \mu e^x = 0.$$

La limite en $-\infty$ de cette expression donne $\lambda = 0$ d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \mu e^x = 0$$

et pour $x = 0$ on obtient $\mu = 0$. Donc la famille (f, g) est libre.

3 ▹ Une famille de polynômes de degrés tous distincts est libre.

Remarques

1 ▹ $\boxed{\text{Une famille contenant } 0_E \text{ est toujours liée.}}$

2 ▹ Une famille contenant deux fois le même vecteur est toujours liée.

3 ▹ Si $x \neq 0_E$ alors la famille (x) est libre.

4 ▹ Si l'on enlève des vecteurs à une famille libre (mais pas tous !) alors la famille obtenue est libre.

5 ▹ On dit que deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont ***colinéaires*** lorsqu'il existe un réel λ tel que $\mathbf{u} = \lambda.\mathbf{v}$ ou $\mathbf{v} = \lambda.\mathbf{u}$.

En particulier, deux vecteurs colinéaires forment une famille liée et on a même l'équivalence :

$$\boxed{\mathbf{u} \text{ et } \mathbf{v} \text{ colinéaires} \iff \text{la famille } (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \text{ est liée}}$$

ou de façon équivalente :

$$\boxed{\mathbf{u} \text{ et } \mathbf{v} \text{ non colinéaires} \iff \text{la famille } (\mathbf{u},\mathbf{v}) \text{ est libre.}}$$

6 ▹ Soit $(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k)$ une famille libre et $\mathbf{v} \in \mathrm{E}$ alors :

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k,\mathbf{v}) \text{ est liée } &\iff \exists(\lambda_1,\dots,\lambda_k) \in \mathbb{R}^k / \mathbf{v} = \lambda_1.\mathbf{u}_1 + \cdots + \lambda_k.\mathbf{u}_k \\ &\iff \mathbf{v} \in \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k).\end{aligned}$$

▸ On dit qu'une famille $(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_k)$ de vecteurs de E est une ***base*** de E lorsque c'est à la fois une famille libre et une famille génératrice de E.

Exemples

1 ▹ Les familles $\big((1,0),(0,1)\big)$ et $\big((1,0),(1,1)\big)$ sont deux bases de $\mathbb{R}^2$.

2 ▹ Une base de $\mathbb{R}_n[x]$ est par exemple $(x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2,\dots,x \mapsto x^n)$.

Propriétés fondamentales

1 ▹ Si $(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k)$ est une base de E alors tout $\mathbf{v}$ s'écrit ***de façon unique*** comme une combinaison linéaire de $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k$ *i.e.* :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathrm{E},\ \exists!\ (\lambda_1,\dots,\lambda_k) \in \mathbb{R}^k \ / \ \mathbf{v} = \lambda_1.\mathbf{u}_1 + \lambda_2.\mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_k.\mathbf{u}_k.$$

2 ▹ Deux sous-espaces vectoriels ayant une base en commun sont égaux (en fait c'est vrai s'ils ont une même famille génératrice).

3 ▹ On dit que E est un ***espace vectoriel de dimension finie*** lorsqu'il admet une famille génératrice $(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k)$ ce qui signifie que l'on a $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k)$.

Tout espace vectoriel, distinct de $\{0_\mathrm{E}\}$, de dimension finie admet au moins une base.

4 ▹ Si $(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k)$ est une famille libre et si $(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m)$ est une famille génératrice de E alors $k \leqslant m$.

Autrement dit, une famille libre contient moins d'éléments qu'une famille génératrice.

5 ▹ Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.

Ce nombre est appelé la ***dimension*** de E et est noté $\dim(\mathrm{E})$.

Par convention, si $\mathrm{E} = \{0_\mathrm{E}\}$ alors $\dim(\mathrm{E}) = 0$.

Exemples

1 ▹ Une base de $\mathbb{R}^2$ est constituée des vecteurs $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$ donc $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

2 ▹ $(1_\mathbb{R})$ est une base de $\mathbb{R}$ donc $\dim(\mathbb{R}) = 1$.

3 ▹ Soit u non nul, la droite vectorielle $\mathrm{D} = \{\lambda \cdot u; \lambda \in \mathbb{R}\}$ admet (u) pour base donc $\dim(\mathrm{D}) = 1$.

4 ▹ Une base de $\mathbb{R}_n[x]$ est $(x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2,\dots,x \mapsto x^n)$ donc $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n+1$.

5 ▹ Un exemple de base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est constituée par les matrices $\mathrm{E}_{i,j}$ (dont le seul coefficient non nul est celui à la place (i,j) qui vaut 1) pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$ donc $\dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) = np$.

Par exemple, $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension n^2.

Cas du «bon» nombre de vecteurs dans un espace de dimension connue

Si $(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n)$ est une famille de vecteurs de E et si $\dim(\mathrm{E}) = n$ alors on a l'équivalence :

$$(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n) \text{ famille libre } \iff (\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n) \text{ famille génératrice de E.}$$

Ainsi, si l'on travaille dans un e.v. de dimension finie dont on connaît la dimension n et si l'on considère une famille de n vecteurs alors pour montrer que c'est une base, il suffit de montrer soit que c'est une famille libre, soit que c'est une famille génératrice.

Exemple

On considère $n+1$ polynômes $\mathrm{P}_0,\ldots,\mathrm{P}_n$ de $\mathbb{R}_n[x]$ vérifiant $\deg \mathrm{P}_k = k$, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. Alors $(\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_1,\ldots,\mathrm{P}_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

Dimension d'un sous-espace vectoriel

On suppose que E est de dimension finie et que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors :

- F et G sont de dimension finie ;
- $\dim \mathrm{F} \leqslant \dim \mathrm{E}$ (et $\dim(\mathrm{G}) \leqslant \dim(\mathrm{E})$) ;
- $\mathrm{F} = \mathrm{G}$ si et seulement si $\mathrm{F} \subset \mathrm{G}$ et $\dim \mathrm{F} = \dim \mathrm{G}$.

Le théorème de la base incomplète

Si $(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k)$ est une famille **libre** de vecteurs de E et si $\dim(\mathrm{E}) = n$ alors il existe $n-k$ vecteurs $\mathbf{u}_{k+1},\ldots,\mathbf{u}_n$ tels que $(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k,\mathbf{u}_{k+1},\ldots,\mathbf{u}_n)$ soit une base de E.

Autrement dit, tout famille libre peut être complétée en une base de l'espace.

On pourrait même imposer une famille génératrice à laquelle appartiennent les vecteurs $\mathbf{u}_{k+1},\ldots,\mathbf{u}_n$.

► Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k$ des vecteurs de E.

Le ***rang*** de la famille $(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k)$ la dimension du sous-espace de E engendré par cette famille, on note note $\mathrm{rg}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k)$:

$$\boxed{\mathrm{rg}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k) = \dim \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k).}$$

Remarque

Puisque $(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Vect}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k)$ et puisque $\mathrm{Vect}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k)$ est un s.e.v. de E, on a :

$$\boxed{\mathrm{rg}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k) \leqslant \min\{k,n\}.}$$

Plus précisément, on a :

$$\boxed{\mathrm{rg}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k) = k \iff (\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k) \text{ famille libre.}}$$

$$\boxed{\mathrm{rg}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k) = \dim \mathrm{E} \iff (\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k) \text{ famille génératrice de E.}}$$

A.3 - Opérations sur les sous-espaces vectoriels

A.3.a - Intersection de sous-espaces

On considère un espace vectoriel E.

Si $(\mathrm{F}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une famille de sous-espaces vectoriels de E alors $\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{F}_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarques

1 ▹ En particulier, si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

2 ▹ On n'a pas de résultat analogue pour la réunion. Plus précisément, si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $\mathrm{F}_1 \cup \mathrm{F}_2$ est un sous-espace de E si et seulement si $\mathrm{F}_1 \subset \mathrm{F}_2$ ou $\mathrm{F}_2 \subset \mathrm{F}_1$.

3 ▹ On peut généraliser la notation Vect.

Si A est une partie non vide de E alors on appelle *sous-espace vectoriel engendré* par A, et l'on note Vect(A), l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A.

On vérifie aisément que :

- Vect(A) est un sous-espace vectoriel de E et c'est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant A c'est-à-dire pour tout sous-espace vectoriel F de E contenant A on a $\mathrm{Vect}(\mathrm{A}) \subset \mathrm{F}$;
- Vect(A) est l'ensemble des *combinaisons linéaires* de vecteurs de A c'est-à-dire :

$$\mathrm{Vect}(\mathrm{A}) = \left\{x \in \mathrm{E} \; ; \; \exists k \in \mathbb{N}^*, \exists(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k) \in \mathrm{A}^k, \exists(\lambda_1,\ldots,\lambda_k) \in \mathbb{R}^k \;/\; x = \lambda_1.\mathbf{u}_k + \cdots + \lambda_k.\mathbf{u}_k\right\}.$$

Notons que «par convention», on a : $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0_\mathrm{E}\}$.

A.3.b - Somme de deux sous-espaces vectoriels

On considère un espace vectoriel E et deux sous-espaces vectoriels F et G de E, alors on pose

$$\mathrm{F} + \mathrm{G} = \{x + y ; (x, y) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de E appelé *somme* de F et G.

Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

1 ▹ On dit que F et G sont en *somme directe* lorsque $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_\mathrm{E}\}$; on note alors $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

2 ▹ On dit que F et G sont *supplémentaires* lorsque $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

3 ▹ On a équivalence entre :

- F et G sont supplémentaires ;
- $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_\mathrm{E}\}$ et : $\forall x \in \mathrm{E}, \exists(a, b) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G} / x = a + b$;
- $\forall x \in \mathrm{E}, \exists!(a, b) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G} / x = a + b$;

et, dans le cas où E est de dimension finie, on peut ajouter les assertions :

- $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_\mathrm{E}\}$ et : $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G}$;
- $\mathcal{B}_\mathrm{F} \cup \mathcal{B}_\mathrm{G}$ est une base de E, où $\mathcal{B}_\mathrm{F}$ et $\mathcal{B}_\mathrm{G}$ sont des bases de F et G respectivement.

Dimension d'une somme de deux sous-espaces vectoriels - formule de Grassmann

1 ▹ Soit F et G deux s.e.v. d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

2 ▹ Soit F et G deux s.e.v. supplémentaires d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors :

$$\dim(E) = \dim F + \dim G.$$

Existence d'un supplémentaire en dimension finie

Soit F un sous-espace d'un espace vectoriel dimension finie E.

Alors il existe au moins un sous-espace G de E tel que $E = F \oplus G$.

Exemple

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x+y=0\right\}$.

Soit $(x,y,z) \in E$, on a :

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in F &\iff x+y=0\\ &\iff (x,y,z) = (x,-x,z)\\ &\iff (x,y,z) = x.(1,-1,0) + z.(0,0,1).\end{aligned}$$

On pose $\varepsilon_1 = (1,1,0)$ et $\varepsilon_2 = (0,0,1)$ alors, les équivalences ci-dessus montrent que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une famille génératrice de F or les deux vecteurs ε_1 et ε_2 ne sont pas proportionnels donc $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est également une famille libre de F donc c'est une base de F et $\dim F = 2$.

Posons $\varepsilon_3 = (1,0,0)$ et $G = \mathrm{Vect}(\varepsilon_3)$, alors :

$$F \cap G = \{0_E\} \quad \text{et} \quad \dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$$

donc $E = F \oplus G$ et G est un supplémentaire de F dans E.

A.3.c - Somme de k sous-espaces vectoriels

On généralise la notion de somme au cas de $k \geqslant 2$ sous-espaces $F_1, ..., F_k$ de E :

$$F_1 + \cdots + F_k = \{x_1 + \cdots + x_k \ ; \ \forall i \in [\![1,k]\!], x_i \in F_i\}.$$

Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E.

Autrement dit, un vecteur x de E est dans $F_1 + \cdots + F_k$ lorsqu'il existe $x_1 \in F_1, \ldots, x_k \in F_k$ tels que :

$$x = x_1 + \cdots + x_k.$$

Proposition et définition I-1

Soit $F_1, \dots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de E. Il y a équivalence entre :

i. pour tout $x \in F_1 + \cdots + F_k$, il existe un unique $(x_1, \dots, x_k) \in F_1 \times \cdots \times F_k$ tel que $x = x_1 + \cdots + x_k$;

ii. pour tout $(f_1, \dots, f_k) \in F_1 \times \cdots \times F_k$, on a :

$$f_1 + \cdots + f_k = 0_E \Longrightarrow f_1 = \cdots = f_k = 0_E;$$

iii. l'union d'une base de F_1, d'une base de F_2, ..., et d'une base de F_k, donne une base de $F_1 + \cdots + F_k$.

Dans ce cas, on dit que $F_1, \dots, F_k$ sont en somme directe et on note :

$$F_1 + \cdots + F_k = F_1 \oplus \cdots \oplus F_k \qquad i.e. \qquad \sum_{i=1}^{k} F_i = \bigoplus_{i=1}^{k} F_i.$$

Démonstration

Corollaire I-2

Soit $F_1, \dots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de E.

1. Si $F_1, \dots, F_k$ sont en somme directe, alors :

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{k} F_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \dim(F_i).$$

2. Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on note $\mathscr{B}_i$ une base de F_i, alors :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} F_i \iff \mathscr{B}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{B}_k \text{ base de E.}$$

On dit alors que $\mathscr{B}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{B}_k$ est une *base adaptée* à la somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{k} F_i$.

A.4 - Bilan des problématiques et savoir-faire fondamentaux

A.4.a - Comment déterminer si une partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel ?

SF1 Montrer la stabilité par combinaison linéaire

La première méthode consiste à montrer que :

- F est non vide (en général, on montre simplement que $\mathbf{0}_E \in F$) ;
- pour tous vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ de F et tout λ de $\mathbb{R}$, on a $\lambda \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \in F$ (ou de façon équivalente $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in F$ et $\lambda \cdot \mathbf{u} \in F$).

Exemple

Montrons que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x - 2y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Tout d'abord, F est une partie de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \in F$.

Soit $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $\mathbf{u} = (x, y, z)$ et $\mathbf{v} = (x', y', z')$, alors :

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} &= \lambda \cdot (x, y, z) + (x', y', z') \\ &= \left(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z'\right). \end{aligned}$$

On a :

$$(\lambda x + x') - 2(\lambda y + y') + (\lambda z + z') = \lambda(x - 2y + z) + (x' - 2y' + z').$$

Comme $\mathbf{u} \in F$, on a $x - 2y + z = 0$.

Comme $\mathbf{v} \in F$, on a $x' - 2y' + z' = 0$.

Il s'ensuit que :

$$(\lambda x + x') - 2(\lambda y + y') + (\lambda z + z') = 0,$$

d'où $\lambda \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \in F$. Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

SF2 Exhiber une famille génératrice

Le sous-espace d'un espace vectoriel E engendré par une famille de vecteurs étant un sous-espace vectoriel de E, on peut directement montrer qu'une partie F de E en est un sous-espace vectoriel en trouvant des vecteurs $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ de F tels que :

$$\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\Big(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\Big).$$

Cette méthode est d'autant plus pertinente si l'on doit chercher ensuite un base du sous-espace vectoriel.

Exemple

Montrons que $\mathrm{F} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x+y+z+t=0 \text{ et } x+y-z-t=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$ que l'on écrit $\mathbf{u} = (x,y,z,t)$, alors :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \in \mathrm{F} &\iff \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+y-z-t=0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x+y+\ \ z+\ \ t=0 \\ \qquad -2z-2t=0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x+y \qquad\quad =0 \\ \qquad\quad z+t=0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y=-x \\ t=-z \end{cases} \\
&\iff \mathbf{u} = (x,-x,z,-z) \\
&\iff \mathbf{u} = x\cdot(1,-1,0,0) + z\cdot(0,0,1,-1).
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\Big((1,-1,0,0),(0,0,1,-1)\Big)$$

et, en particulier, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

SF3 Trouver un exemple explicite contredisant la définition

Pour montrer qu'une partie F de E n'est pas un sous-espace vectoriel de E, on peut
- montrer que $\mathbf{0}_\mathrm{E} \notin \mathrm{F}$;
- trouver un vecteur $\mathbf{u}$ de F et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda \cdot \mathbf{u} \notin \mathrm{F}$;
- trouver deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ de F tels que $\mathbf{u}+\mathbf{v} \notin \mathrm{F}$.

Exemple

Montrons que $\mathrm{F} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ xy=0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Posons $\mathbf{u} = (1,0)$ et $\mathbf{v} = (0,1)$, on a $\mathbf{u} \in \mathrm{F}$ et $\mathbf{v} \in \mathrm{F}$.

En revanche, $\mathbf{u}+\mathbf{v} = (1,1)$ donc $\mathbf{u}+\mathbf{v} \notin \mathrm{F}$.

Il s'ensuit que F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

SF4 Considérer une intersection de sous-espaces vectoriels

Une intersection de sous-espaces vectoriels de E étant également un sous-espace vectoriel de E,on peut montrer qu'une partie de E est une intersection de sous-espaces déjà connus pour montrer que c'est également un sous-espace vectoriel de E.

Exemple

Montrons que $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x - 2y + z = 0 \text{ et } x - y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On a vu que $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x - 2y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Montrons que $F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x - y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On considère $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ que l'on écrit $\mathbf{u} = (x,y,z)$ alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \in F_2 &\iff x = y \\ &\iff \mathbf{u} = (x,x,z) \\ &\iff \mathbf{u} = x \cdot (1,1,0) + z \cdot (0,0,1), \end{aligned}$$

donc $F_2 = \operatorname{Vect}\big((1,1,0),(0,0,1)\big)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Finalement, $F = F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

A.4.b - Comment étudier les propriétés d'une famille de vecteurs ?

SF5 Montrer qu'une famille est génératrice

Montrer qu'une famille de vecteurs $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ d'un sous-espace vectoriel F engendre ce sous-espace, consiste à montrer que tout vecteur $\mathbf{v}$ de F peut s'écrire comme une combinaison linéaire de ces vecteurs. Techniquement, cela revient, par le biais de la résolution d'un système linéaire, à expliciter des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tels que l'on ait :

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + \lambda_k \cdot \mathbf{u}_k.$$

Exemple

Montrons que les vecteurs $\mathbf{u} = (1,1,0)$, $\mathbf{v} = (1,0,-1)$ et $\mathbf{w} = (1,1,1)$ engendrent $\mathbb{R}^3$.

Soit $\mathbf{x} = (x,y,z)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$ et λ, μ et η des scalaires. La relation :

$$\mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{u} + \mu \cdot \mathbf{v} + \eta \cdot \mathbf{w},$$

équivaut à :

$$(x,y,z) = \lambda \cdot (1,1,0) + \mu \cdot (1,0,-1) + \eta \cdot (1,1,1),$$

donc au système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \eta = x \\ \lambda \qquad + \eta = y \\ \quad - \mu + \eta = z \end{cases},$$

soit :

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \eta = x \\ \quad - \mu \qquad = y - x \\ \quad - \mu + \eta = z \end{cases},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \eta = x \\ \quad - \mu \qquad = y - x \\ \qquad\quad \eta = x - y + z \end{cases},$$

et finalement :

$$\begin{cases} \lambda & = -x+2y-z \\ \quad -\mu & = y-x \\ \qquad \eta & = x-y+z \end{cases}.$$

On en déduit (notamment) que $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

SF6 Étudier la liberté d'une famille de vecteurs

Pour montrer qu'une famille de vecteurs $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k$ de E est une famille libre, on considère une combinaison linéaire nulle :

$$\lambda_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + \lambda_k \cdot \mathbf{u}_k = \mathbf{0}_\mathrm{E}$$

de ces vecteurs et on montre que tous les réels $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ sont tous nuls.

Pour montrer qu'une telle famille est liée, on trouve (explicitement) des coefficients réels $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ **non tous nuls** tels que l'on ait :

$$\lambda_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + \lambda_k \cdot \mathbf{u}_k = \mathbf{0}_\mathrm{E}.$$

Dans le cas particulier de deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, la famille est libre si et seulement si ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Exemples

1 ▹ Étudions la liberté des vecteurs $\mathbf{u} = (1,1,1)$, $\mathbf{v} = (1,-1,0)$ et $\mathbf{w} = (0,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$.

Soit λ, μ et η des réels tels que : $\lambda\cdot\mathbf{u}+\mu\cdot\mathbf{v}+\eta\cdot\mathbf{w} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$.

Cette relation revient à écrire :

$$\lambda\cdot(1,1,1)+\mu\cdot(1,-1,0)+\eta\cdot(0,1,1) = (0,0,0),$$

ce qui se traduit par le système :

$$\begin{cases} \lambda+\mu & = 0 \\ \lambda-\mu+\eta & = 0 \\ \lambda \quad +\eta & = 0 \end{cases}.$$

La résolution donne facilement $\lambda = 0$, $\mu = 0$ et $\eta = 0$.

Donc la famille $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ est libre.

2 ▹ Étudions la liberté des vecteurs $\mathbf{u} = (1,1,0)$, $\mathbf{v} = (1,0,0)$ et $\mathbf{z} = (2,1,0)$ de $\mathbb{R}^3$.

La famille est liée puisque :

$$1\cdot\mathbf{u}+1\cdot\mathbf{v}+(-1)\cdot\mathbf{w} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}.$$

En revanche, ces trois vecteurs sont deux à deux non colinéaires donc les familles $(\mathbf{u},\mathbf{v})$, $(\mathbf{u},\mathbf{w})$ et $(\mathbf{v},\mathbf{w})$ sont toutes trois libres.

SF7 Déterminer le rang d'une famille de vecteurs

On peut déterminer (algorithmiquement) le rang d'une famille de vecteurs $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k$ de E. Ce rang vaut k lorsque la famille est libre et il vaut dim(E) lorsque la famille est génératrice.

Exemple

Montrons que les vecteurs suivants forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{u}_1 = (1,1,1),\ \mathbf{u}_2 = (-1,1,-1),\ \mathbf{u}_3 = (1,2,1) \text{ et } \mathbf{u}_4 = (1,0,2).$$

La matrice de ces vecteurs dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

d'où en effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3,$$

ce qui signifie que la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$ engendre $\mathbb{R}^3$.

A.4.c - Comment exploiter les propriétés d'une famille de vecteurs ?

SF8 Déterminer la dimension d'un sous-espace vectoriel

La connaissance d'une base d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ permet d'en déduire sa dimension.

Exemple

Déterminer la dimension du sous-espace F de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs :

$$\mathbf{u}_1 = (1,-1,1), \mathbf{u}_2 = (1,0,-2), \mathbf{u}_3 = (4,-3,1) \text{ et } \mathbf{u}_4 = (0,-1,3).$$

On remarque que :

$$\mathbf{u}_3 = 3 \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \ \text{ et } \ \mathbf{u}_4 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2,$$

donc $F = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$. De plus, les deux vecteurs $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre or ils engendrent F donc ils forment une base de F. Donc F est de dimension 2.

SF9 Exploiter la dimension et le nombre de vecteurs

Lorsque $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u_k}$ sont des vecteurs d'un sous-espace F de E de dimension k, on a l'équivalence entre le fait que cette famille de vecteurs soit libre et le fait qu'elle soit génératrice ; l'une de ces deux propriétés suffit donc à montrer que c'est une base de F.

En particulier, une famille de n vecteurs de E (où E est de dimension n) est une base de E si et seulement si elle est de rang n.

Exemples

1 ▹ Montrons que les vecteurs suivants forment une base de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{u}_1 = (1,1,1,1), \mathbf{u}_2 = (1,2,1,1), \mathbf{u}_3 = (-1,-1,2,0) \text{ et } \mathbf{u}_4 = (0,1,0,1).$$

La matrice de ces vecteurs dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a par les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$:

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

puis par l'opération $C_4 \leftarrow C_4 - C_3$:

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

Donc $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

On aurait aussi pu montrer la liberté de la famille or cette famille contient 4 vecteurs dans l'espace $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4 donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

2 ▹ On dit que deux vecteurs $\mathbf{u} = (x, y)$ et $\mathbf{v} = (x', y')$ de $\mathbb{R}^2$ sont ***orthogonaux*** lorsque : $xx' + yy' = 0$.

Montrons que si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux de $\mathbb{R}^2$ alors ils forment une base de $\mathbb{R}^2$.

Écrivons : $\lambda.\mathbf{u} + \mu.\mathbf{v} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ avec λ et μ réels, alors :

$$(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') = (0, 0),$$

puis :

$$x(\lambda x + \mu x') = 0 \text{ et } y(\lambda y + \mu y') = 0,$$

et en additionnant :

$$\lambda(x^2 + y^2) + \mu(xx' + yy') = 0,$$

d'où :

$$\lambda(x^2 + y^2) = 0.$$

Comme on a supposé $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$, on a $x^2 + y^2 \neq 0$ d'où $\lambda = 0$.

On en déduit que $\mu.\mathbf{v} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ mais on a supposé $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ donc $\mu = 0$.

On a obtenu la liberté de la famille $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ mais cette famille est constituée de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ or $\mathbb{R}^2$ est de dimension deux donc cette famille est une base de $\mathbb{R}^2$.

SF10 Montrer une inclusion entre sous-espaces vectoriels

Considérons deux sous-espaces vectoriels F et G de E. Pour montrer que G contient F, il suffit de montrer que G contient une famille génératrice de F.

Exemple

Montrons que $F \subset G$ avec :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x = y = z\} \text{ et } G = \mathrm{Vect}\big((1, -1, 0), (0, 2, 1)\big).$$

Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ que l'on écrit $\mathbf{u} = (x, y, z)$ alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \in \mathrm{F} &\iff x = y = z \\ &\iff \mathbf{u} = (x, x, x) = x \cdot (1, 1, 1) \end{aligned}$$

Donc F est la droite vectorielle engendrée par $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$. De plus :

$$\mathbf{v} = (1, -1, 0) + (0, 2, 1) \in \mathrm{G},$$

donc F est contenu dans G.

SF11 Établir l'égalité de deux sous-espaces vectoriels

Pour montrer que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont égaux, on peut bien entendu montrer les deux inclusions de l'un dans l'autre ; cela n'a rien de spécifique aux sous-espaces vectoriels, cependant l'idée précédente montre que le contexte des sous-espaces vectoriels simplifie la démarche.

Une autre approche, en dimension finie, consiste à montrer l'inclusion de l'un dans l'autre puis le fait qu'ils ont la même dimension.

Exemple

Montrons que F = G avec :

$$\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\Big((-1, 3, 2), (-3, -1, 1)\Big)\} \text{ et } \mathrm{G} = \mathrm{Vect}\Big((1, 1, 0), (-1, 1, 1)\Big).$$

On a :

$$(-1, 3, 2) = (1, 1, 0) + 2 \cdot (-1, 1, 1) \in \mathrm{G}$$

et :

$$(-3, -1, 1) = (-2) \cdot (1, 1, 0) + (-1, 1, 1) \in \mathrm{G},$$

d'où $\mathrm{F} \subset \mathrm{G}$.

De plus, les vecteurs $(-1, 3, 2)$ et $(-3, -1, 1)$ ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre or ils engendrent F donc ils forment une base de F ; en particulier, on a $\dim(\mathrm{F}) = 2$.

De même, les vecteurs $(1, 1, 0)$ et $(-1, 1, 1)$ ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre or ils engendrent G donc ils forment une base de G ; en particulier, on a $\dim(\mathrm{G}) = 2$.

Ainsi, on a $\mathrm{F} \subset \mathrm{G}$ et $\dim(\mathrm{F}) = \dim(\mathrm{G})$, donc F = G.

A.4.d - Comment montrer que des sous-espaces sont supplémentaires ?

SF12 Montrer l'existence et l'unicité de la décomposition d'un vecteur

Pour montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, on montre que tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme un vecteur de F plus un vecteur de G. On peut se contenter de montrer l'existence de l'écriture et de vérifier que $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_\mathrm{E}\}$.

Exemple

Dans $E = \mathbb{R}^2$, on considère les vecteurs $\mathbf{u} = (1, 0)$ et $\mathbf{v} = (1, 1)$, on pose $F = \mathrm{Vect}(\mathbf{u})$ et $G = \mathrm{Vect}(\mathbf{v})$.

SF13 Raisonner par analyse et synthèse

Pour montrer que $E = F \oplus G$, on considère $\mathbf{x} \in E$ et une écriture $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ avec $\mathbf{u} \in F$ e $\mathbf{v} \in G$. L'analyse consiste à en déduire les expressions de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ en fonction de $\mathbf{x}$ (d'où l'unicité de l'écriture) puis la synthèse consiste à vérifier que cette écriture est correcte (d'où l'existence de l'écriture).

Exemple

Dans l'espace E des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, on considère les deux sous-espaces F et G des fonctions paires et impaires respectivement. Montrer que $E = F \oplus G$.

SF14 Montrer que deux s.e.v. sont en somme directe puis exploiter la dimension finie

Pour montrer que $E = F \oplus G$, on montre que la somme est directe en vérifiant $F \cap G = \{0_E\}$ puis on vérifie que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Exemple

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère les deux sous-espaces F et G des matrices symétriques et des matrices antisymétriques respectivement. Montrer que $E = F \oplus G$.

SF15 Montrer qu'une réunion des bases des s.e.v. est une base de l'espace

Pour montrer que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_k$, on considère une base $\mathcal{B}_1$ de F_1, une base $\mathcal{B}_2$ de F_2, etc. puis on montre que la réunion de ces familles forme une base de E.

Exemple

On considère les trois parties suivantes de $E = \mathbb{R}_3[x]$:

$F = \{P \in E \,;\, P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $G = \{P \in E \,;\, P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$ et $H = \{P \in E \,;\, \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = P(-x)\}$.

Montrons que : $E = F \oplus G \oplus H$.

Quelques exercices d'application

Exercice C-1

Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1. $\mathrm{E} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ;\ 2x + 3y = 0\right\}$;

2. $\mathrm{F} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ;\ x^2 = xy\right\}$;

3. $\mathrm{G} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ;\ x = y\right\}$;

4. $\mathrm{H} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ;\ x + y = 1\right\}$.

Exercice C-2

Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

1. $\mathrm{E} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ x + y + z = 0\right\}$;

2. $\mathrm{F} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ x \geqslant 0\right\}$;

3. $\mathrm{G} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ 2x = 3y = z\right\}$;

4. $\mathrm{H} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ yz = 0\right\}$.

Exercice C-3

Indiquer si les vecteurs suivants forment une famille libre ou liée de $\mathbb{R}^3$.

1. $\mathbf{x} = (1,-2,1)$ et $\mathbf{y} = (1,-3,3)$;
2. $\mathbf{x} = (0,1,-2)$, $\mathbf{y} = (-1,2,1)$ et $\mathbf{z} = (2,3,0)$;
3. $\mathbf{x} = (1,0,2)$, $\mathbf{y} = (-1,1,-3)$ et $\mathbf{z} = (-1,3,-5)$.

Exercice C-4

Soit $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_p)$ une famille libre de $\mathbb{R}^n$. On pose $\mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k - \mathbf{a}_p$ pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$.

Montrer que $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{p-1})$ est également une famille libre de $\mathbb{R}^n$.

Exercice C-5

Déterminer les valeurs du réel a afin que les vecteurs $\mathbf{u}_1 = (0,1,1,1)$, $\mathbf{u}_2 = (1,0,1,1)$, $\mathbf{u}_3 = (1,1,0,1)$ et $\mathbf{u}_4 = (1,1,1,a)$ forment une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice C-6

On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + 2y - z = 0\} \ , \ \ \mathrm{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + y + z = 0\}$$

$$\text{et} \ \ \mathrm{G} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ y = 0\}.$$

1. Montrer que E, F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.
2. Justifier que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base : $\mathrm{E} \cap \mathrm{F}$, $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$, $\mathrm{E} \cap \mathrm{G}$ et $\mathrm{E} \cap \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$.

Exercice C-7

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\mathbf{u} = (1,2,3)$, $\mathbf{v} = (2,-1,1)$, $\mathbf{a} = (1,0,1)$ et $\mathbf{b} = (0,1,1)$. Montrer que $\mathrm{Vect}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathrm{Vect}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Exercice C-8

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^4$, $\mathrm{F} = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x - y + z + t = 0\right\}$ et $\mathrm{G} = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x = y = z = -t\right\}$.

1. Montrer que F et G sont des s.e.v. de E et en donner des bases.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice C-9

Soit $\mathrm{F} = \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ ; \ f(0) = f'(0) = 0\}$ et :

$$\mathrm{G} = \{x \mapsto ax + b \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

B - Applications linéaires et matrices

B.1 - Définitions et exemples

Notion d'application linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application.

On dit que f est une ***application linéaire*** lorsque :

- $\forall(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathrm{E}^2,\ f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$;
- $\forall \mathbf{u} \in \mathrm{E},\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda.\mathbf{u}) = \lambda.f(\mathbf{u})$.

L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

Remarques

1 ▹ $\boxed{\forall f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}),\ f(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{F}.}$

2 ▹ Pour prouver que f est linéaire, on peut remplacer les deux conditions par une seule :

$$\boxed{f \text{ est linéaire } \iff \forall(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathrm{E}^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda.\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \lambda.f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}).}$$

Plus généralement, si f est linéaire alors pour tout $(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_n) \in \mathrm{E}^n$ et tout $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\mathbf{u}_i)$$

Exemples

1 ▹ On considère l'application $f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \mathrm{P}(x) \mapsto x\mathrm{P}(x)$.

Notons qu'il y a un abus de notation consistant à écrire $\mathrm{P}(x)$ et $x\mathrm{P}(x)$ au lieu de P et $x \mapsto x\mathrm{P}(x)$.

Soit $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{R}[x]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda.\mathrm{P}+\mathrm{Q})(x) &= x(\lambda.\mathrm{P}+\mathrm{Q})(x) \\ &= \lambda x\mathrm{P}(x) + x\mathrm{Q}(x) \\ &= \lambda.f(\mathrm{P})(x) + f(\mathrm{Q})(x) \\ &= (\lambda.f(\mathrm{P}) + f(\mathrm{Q}))(x) \end{aligned}$$

donc $f(\lambda.\mathrm{P}+\mathrm{Q}) = \lambda.f(\mathrm{P}) + f(\mathrm{Q})$ donc f est linéaire.

2 ▹ Si E est un e.v. et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors l'*homothétie* $\begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & \alpha.x \end{array}$ est linéaire.

3 ▹ L'application $\mathrm{D} : \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}(\mathbb{R}), f \mapsto f'$ est linéaire.

Les applications linéaires de E vers $\mathbb{R}$ sont appelées les ***formes linéaires*** de E.

L'ensemble des formes linéaires de E est noté E^* est est appelé le dual de E.

On a donc $\mathrm{E}^* = \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathbb{R})$.

Exemples

1 ▹ L'application $\mathscr{C}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ est une forme linéaire.

2 ▹ L'application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k$ est une forme linéaire.

Remarques

1 ▹ Si $\mathrm{E} = \mathrm{F}$ alors on note $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ au lieu de $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{E})$.

Les éléments de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ sont appelés les ***endomorphismes*** de E.

2 ▹ Les bijections de $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ sont appelées les ***isomorphismes*** de E vers F.

3 ▹ Si E et F sont des espaces vectoriels alors $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est un sous espace vectoriel de l'espace $\mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ des applications de E vers F.

4 ▹ Si E et F sont des espaces vectoriels et si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est un isomorphisme alors sa réciproque f^{-1} est aussi linéaire.

L'exemple de la trace

1. On appelle ***trace*** d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et l'on note $\mathrm{tr}(\mathrm{A})$, la somme des éléments diagonaux de A :
$$tr(\mathrm{A}) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}[k, k].$$
2. L'application $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :
$$\mathrm{tr}(\mathrm{AB}) = \mathrm{tr}(\mathrm{BA}).$$

Démonstration

Image et noyau

Considérons deux espaces vectoriels E et F et une application $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Si G est un s.e.v. de E alors $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F.

   En particulier, l'***image*** de f définie par :

   $$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{y \in F \ ; \ \exists x \in E / y = f(x)\}$$

   est un sous-espace vectoriel de F.

   On a $\mathrm{Im}(f) = F$ si et seulement si f est surjective.

2. Si H est un s.e.v. de F alors $\{x \in E \ ; \ f(x) \in H\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

   En particulier, le ***noyau*** de f défini par :

   $$\ker f = \{x \in E \ ; \ f(x) = 0_F\}$$

   est un sous-espace vectoriel de E.

   On a $\ker(f) = \{0_E\}$ si et seulement si f est injective.

Exemples

1 ▹ Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x-y$ alors : $\ker f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x = y\}$.

2 ▹ Si $f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \mathrm{P}(x) \mapsto \mathrm{P}'(x)$ alors $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[x])$ et on a pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[x]$:

$$\begin{aligned} \mathrm{P} \in \ker f &\iff \mathrm{P}' = 0 \\ &\iff \text{P est un polynôme constant} \end{aligned}$$

donc $\ker f$ est l'ensemble des polynômes constants et, par ailleurs, $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}[x]$ (puisque tout polynôme est la dérivée d'un certain polynôme).

Projecteurs

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E *i.e.* $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}$.

Alors tout élément $\mathbf{u} \in \mathrm{E}$ s'écrit de façon unique sous la forme $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\mathrm{F} + \mathbf{u}_\mathrm{G}$ avec $\mathbf{u}_\mathrm{F} \in \mathrm{F}$ et $\mathbf{u}_\mathrm{G} \in \mathrm{G}$.

1. L'application p qui à $\mathbf{u}$ associe cet élément $\mathbf{u}_\mathrm{F}$ est un endomorphisme de E appelé ***projecteur*** (ou projection) de E sur F parallèlement à G.
2. On a alors : $\ker p = \mathrm{G}$ et $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{F}$.

Soit $p \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, alors :

$$p \text{ est un projecteur} \iff p \circ p = p.$$

Dans ce cas, on a $\mathrm{E} = \ker p \oplus \mathrm{Im}\, p$ et p est le projecteur de E sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\ker p$.

Symétries

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E *i.e.* $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}$.

Alors tout élément $\mathbf{u} \in \mathrm{E}$ s'écrit de façon unique sous la forme $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\mathrm{F} + \mathbf{u}_\mathrm{G}$ avec $\mathbf{u}_\mathrm{F} \in \mathrm{F}$ et $\mathbf{u}_\mathrm{G} \in \mathrm{G}$.

L'application s qui à $\mathbf{u}$ associe $\mathbf{u}_\mathrm{F} - \mathbf{u}_\mathrm{G}$ est un endomorphisme de E appelé ***symétrie*** de E par rapport à F parallèlement à G.

2. On a alors : $\ker p = \ker(s + \mathrm{id}_\mathrm{E})$ et $\mathrm{Im}\, p = \ker(s - \mathrm{id}_\mathrm{E})$.

Soit $s \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, alors :

$$s \text{ est une symétrie} \iff s \circ s = \mathrm{id}_\mathrm{E}.$$

Dans ce cas, s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{id}_\mathrm{E})$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{id}_\mathrm{E})$.

Exemple

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$, $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\big((1,0)\big)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}\big((1,1)\big)$, on note p le projecteur sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Pour tout $(x,y) \in \mathrm{E}$, on a : $(x,y) = (x-y,0) + (y,y)$ donc :

$$p\left((x,y)\right) = (x-y,0) \qquad \text{et} \qquad s\left((x,y)\right) = (x-2y,-y).$$

Notons que l'on a la relation :

$$p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{id}_\mathrm{E}) \ \ i.e. \ \ s = 2p - \mathrm{id}_\mathrm{E}.$$

Le cas de la dimension finie

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille génératrice de E.

   Alors la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.
2. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

   L'application f est bijective si et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F.

Le fait que E soit de dimension finie permet de définir de façon unique une application linéaire f en définissant les images par f d'une base de E : une application linéaire est entièrement déterminée par l'image des vecteurs d'une base.

En particulier, deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.

Cas où E **et** F **sont de dimension finie**

Soit $f : E \to F$ avec E et F de dimension finie.

1. Si f est injective alors $\dim(E) \leqslant \dim(F)$.
2. Si f est surjective alors $\dim(E) \geqslant \dim(F)$.
3. Si f est bijective alors $\dim(E) = \dim(F)$.
4. De façon générale : E et F sont de même dimension si et seulement s'il existe un isomorphisme entre E et F.

En particulier, si E et F sont <u>de même dimension finie</u>, alors :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}.$$

Ce résultat s'applique en particulier pour un endomorphisme sur un espace de dimension finie.

Exemples

1 ▹ Si E est de dimension p et F est de dimension n alors $\mathcal{L}(E, F)$ est isomorphe à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et ces ceux espaces donc de dimension np.

2 ▹ En particulier, $\mathbb{R}^n$ est isomorphe à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

3 ▹ On a $\dim \mathcal{L}(E) = (\dim E)^2$ et $\dim \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = \dim E$.

formule du rang

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E de dimension finie, alors :

$$\dim E = \dim\left(\ker f\right) + \dim\left(\operatorname{Im} f\right).$$

<u>**Remarque**</u>

On déduit notamment de cette formule une caractérisation des hyperplans.

Si E est un espace vectoriel de dimension n et H un sous-espace vectoriel de E, alors :

$$\dim(H) = n - 1 \iff \text{il existe une forme linéaire non nulle } \varphi \text{ de E telle que } H = \ker \varphi.$$

Un tel sous-espace vectoriel est appelé un ***hyperplan*** de E.

Rang d'une application linéaire

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et F un espace vectoriel.

On considère une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

1. Le ***rang*** de f, noté $\mathrm{rg}(f)$, est le rang de la famille $\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$.

Il s'agit donc de la dimension de $\mathrm{Im}(f)$: $\boxed{\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}(f).}$

2. On a :

$$f \text{ injective} \iff \mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{E} \qquad f \text{ surjective} \iff \mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{F}$$

$$f \text{ bijective} \iff \mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}.$$

3. La *formule du rang* se reformule donc (avec E de dimension finie) sous la forme :

$$\dim \mathrm{E} = \dim \ker f + \mathrm{rg}\, f.$$

4. Le rang est inchangé par composition, à gauche ou à droite, par un isomorphisme.

Exercice C-10

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et u et v deux applications linéaires de E dans F. Montrer que :

$$|\mathrm{rg}\, u - \mathrm{rg}\, v| \leqslant \mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v.$$

B.2 - Utilisation de l'outil matriciel

B.2.a - Représentation matricielle d'un vecteur

Soit E un espace vectoriel de dimension n, de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Soit $x \in \mathrm{E}$, alors x s'écrit de façon unique $x = x_1.e_1 + x_2.e_2 + \cdots + x_n.e_n$ avec $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

On appelle $\boxed{\text{matrice de } x \text{ dans la base } \mathcal{B}}$, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Plus généralement, $\boxed{\text{la matrice de } k \text{ vecteurs de E dans la base } \mathcal{B}}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ dont les k colonnes correspondent aux matrices de chacun de ces vecteurs dans la base $\mathcal{B}$.

Exemples

1 ▹ Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique, la matrice de (a, b, c) est : $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

2 ▹ Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base $\big((1,0),(1,1)\big)$, la matrice de (a, b) est : $\begin{pmatrix} a-b \\ b \end{pmatrix}$.

3 ▹ Dans $\mathbb{R}_2[x]$ muni de la base canonique $(x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2)$, la matrice des vecteurs $x \mapsto x^2 - 4$ et $x \mapsto x^2 + x + 1$ est : $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

B.2.b - Représentation matricielle d'une application linéaire

Soit E un espace vectoriel de dimension n, de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, et F un espace vectoriel de dimension p, de base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_p)$.

On a vu qu'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est complètement caractérisée par l'image de la base $\mathcal{B}$ *i.e.* par la famille $\big(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\big)$ de n vecteurs de F.

On écrit chacun de ces vecteurs dans la base $\mathcal{B}'$ de F :

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} e'_i.$$

On appelle $\boxed{\text{matrice de } f \text{ dans les bases } \mathcal{B} \text{ et } \mathcal{B}'}$, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ donnée par :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix}$$

i.e. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ est la matrice à p lignes et n colonnes dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$ de F.

Exemples

1 ▹ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, 2x - 3y)$ où $\mathbb{R}^2$ est muni de la base canonique $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée, alors :

2 ▹ Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x + y + z, -y)$ où $\mathbb{R}^3$ est muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathbb{R}^2$ est muni de la base canonique $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ alors :

3 ▹ Soit $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x], \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}'$ où $\mathbb{R}_3[x]$ est muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2, x \mapsto x^3)$ et $\mathbb{R}_2[x]$ est muni de sa base canonique $\mathcal{B}' = (x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2)$ alors :

B.2.c - Expression matricielle d'une application linéaire

Soit E un espace vectoriel de dimension n, de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, et F un espace vectoriel de dimension p, de base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_p)$.

On considère $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ dont la matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est la matrice $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$; on note $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ de sorte que :

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ f(e_j) = a_{1,j}e'_1 + a_{2,j}e'_2 + \cdots + a_{p,j}e'_p.$$

Soit $x \in \mathrm{E}$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice colonne $\mathrm{X} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$; on note $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ de sorte que :

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \xi_j f(e_j), \end{aligned}$$

puis en utilisant les expressions des $f(e_j)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^{n} \xi_j \left(\sum_{i=1}^{p} a_{i,j} e'_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \xi_j\right) e'_i, \end{aligned}$$

et finalement :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} y_i e'_i \quad \text{avec} \quad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \xi_j.$$

On a donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\big(f(x)\big) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

et l'expression des coefficients y_i montre donc que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\big(f(x)\big) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x).$$

Proposition I-3

Soit X la matrice de $x \in \mathrm{E}$ dans la base $\mathcal{B}$, A la matrice de $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ dans les base $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et Y la matrice de $y = f(x) \in \mathrm{F}$ dans la base $\mathcal{B}'$ alors :

$$\mathrm{Y} = \mathrm{AX}.$$

Exemple

Considérons l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x,y,z) \mapsto (-y+z, x-2z)$.

B.2.d - Combinaison linéaire de matrices d'applications linéaires

On garde les mêmes notations et on considère deux applications linéaires f et g de $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ alors on vérifie aisément que :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)+\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f+g) \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\lambda f)=\lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f).}$$

Autrement dit l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) \end{array}$ est un isomorphisme.

On retrouve : $\dim \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) = \dim \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) = pn$.

B.2.e - Produit de matrices d'applications linéaires

On considère désormais un troisième espace vectoriel G admettant une base $\mathcal{B}''=(e''_1,\dots,e''_q)$ ainsi que deux applications $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$, on a alors :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}(g)\times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}(g\circ f).}$$

En effet, si X est la matrice de $x \in \mathrm{E}$ dans la base $\mathcal{B}$ et si A est la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ alors AX est la matrice de $f(x) \in \mathrm{F}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Si on note B la matrice de g dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ alors B(AX) est la matrice de $g\big(f(x)\big)$ dans la base $\mathcal{B}''$.

Ainsi, (BA)X est la matrice de $(g\circ f)(x)$ dans la base $\mathcal{B}''$ donc BA est bien la matrice de $g\circ f$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}''$.

B.2.f - Matrice d'un isomorphisme

On considère $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ où E et F ont la même dimension.

On note $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}'=(e'_1,\dots,e'_n)$ une base de F.

Par exemple si E = F alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_\mathrm{E})=\mathrm{I}_n$.

Si f est un isomorphisme alors on a $f\circ f^{-1}=\mathrm{id}_\mathrm{F}$ et $f^{-1}\circ f=\mathrm{id}_\mathrm{E}$ d'où

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f^{-1})=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_\mathrm{F})=\mathrm{I}_n \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f^{-1})\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_\mathrm{E})=\mathrm{I}_n$$

donc la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ est inversible et on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)^{-1}=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f^{-1})$.

Réciproquement, si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ est inversible alors il existe une matrice B telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)\mathrm{B} = \mathrm{B}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) = \mathrm{I}_n.$$

On note $\mathrm{B} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$ ce qui donne :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) = \mathrm{I}_n$$

donc $f \circ g = \mathrm{id}_\mathrm{F}$ et $g \circ f = \mathrm{id}_\mathrm{E}$.

Proposition I-4

L'application f est un isomorphisme si et seulement si la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ est inversible.

On a alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f^{-1})$.

B.3 - Changement de bases

B.3.a - Matrice de passage

On considère deux bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ d'un espace vectoriel E.

On écrit les vecteurs de la seconde base en fonction de ceux de la première :

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ e'_j = p_{1,j}e_1 + p_{2,j}e_2 + \cdots + p_{n,j}e_n.$$

Définition I-5

On appelle *matrice de passage* de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$, la matrice

$$\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,n} \\ \vdots & & & \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix}$$

Remarques

1 ▹ La matrice $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ correspond à la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_\mathrm{E})$ de id_E avec la base $\mathcal{B}'$ au départ et la base $\mathcal{B}$ à l'arrivée.

2 ▹ La matrice $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible et son inverse est la matrice $\mathrm{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ de passage de la base $\mathcal{B}'$ vers la base $\mathcal{B}$.

Exemples

1 ▹ On vérifie aisément que la famille $\mathcal{B} = \big((1,0),(1,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

La matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base $\mathcal{B}$ est : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2 ▹ La famille $\mathcal{B} = \left(x \mapsto 1, x \mapsto 2x-1, x \mapsto x^2+x+1, x \mapsto x^3\right)$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$ (ce sont quatre polynômes de degrés échelonnés dans un espace de polynômes de dimension 4).

La matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$ à la base $\mathcal{B}$ est : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3 ▹ Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$, on considère la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et on pose :

$$e'_1 = (1,1,0) \ , \ e'_2 = (0,1,1) \ \text{ et } \ e'_3 = (0,0,1).$$

Montrons que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis déterminons la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ ainsi que P^{-1}.

B.3.b - Effet d'un changement de base sur les composantes d'un vecteur

On considère deux bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ d'un espace vectoriel E.

On écrit les vecteurs de la seconde base en fonction de ceux de la première :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \ e'_j = p_{1,j} e_1 + p_{2,j} e_2 + \cdots + p_{n,j} e_n.$$

Soit $x \in \mathrm{E}$ que l'on décompose dans chacune des deux bases :

$$x = \xi_1.\mathbf{e}_1 + \xi_2.\mathbf{e}_2 + \cdots + \xi_n.\mathbf{e}_n \qquad \text{et} \qquad x = \xi'_1.\mathbf{e}'_1 + \xi'_2.\mathbf{e}'_2 + \cdots + \xi'_n.\mathbf{e}'_n.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{n} \xi'_j.\mathbf{e}'_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \xi'_j.\Big(\sum_{i=1}^{n} p_{i,j}.\mathbf{e}_i\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} \xi'_j p_{i,j}\Big).\mathbf{e}_i \end{aligned}$$

et l'unicité de l'écriture d'un vecteur dans une base conduit donc à :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \xi_i = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}\xi'_j$$

ce qui correspond à la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,n} \\ \vdots & & & \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \vdots \\ \xi'_n \end{pmatrix} \qquad i.e. \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x).$$

Proposition I-6

Si X est la matrice de $x \in \mathrm{E}$ dans la base $\mathcal{B}$, X′ est la matrice de x dans la base $\mathcal{B}'$ et P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ alors : $\mathrm{X} = \mathrm{PX}'$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}_3[x]$, on considère les bases :

$$\mathcal{B} = (x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2, x \mapsto x^3) \text{ et } \mathcal{B}' = (x \mapsto 1, x \mapsto x-1, x \mapsto (x-1)^2, x \mapsto (x-1)^3).$$

B.3.c - Effet d'un changement de base sur la matrice d'une application linéaire

On considère deux bases $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1,\ldots,e'_n)$ d'un espace vectoriel E et dont on considère deux bases $\mathcal{C} = (f_1,\ldots,f_n)$ et $\mathcal{C}' = (f'_1,\ldots,f'_n)$ d'un espace vectoriel F.

On note $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ de E à la base $\mathcal{B}'$ et on note $\mathrm{Q} = \mathrm{P}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ de F à la base $\mathcal{C}'$.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, on a $u = \mathrm{id}_\mathrm{F} \circ u \circ \mathrm{id}_\mathrm{E}$ d'où :

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{B}'}(u) &= \mathrm{P}_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u)\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\\ &= \left(\mathrm{P}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}\right)^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u)\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.\end{aligned}$$

Proposition I-7

Soit A la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et A′ la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$ alors :

$$\mathrm{A}' = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P}$$

où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et Q est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$.

B.3.d - Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel dont on considère deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Proposition I-8

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ et A′ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$ alors :

$$\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P}$$

où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Remarque

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont dites ***équivalentes*** lorsqu'il existe deux matrices inversibles $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{B} = \mathrm{QAP}$.

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites ***semblables*** lorsqu'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$.

Il ne faut pas confondre ces deux notions ; la seconde ne concerne d'ailleurs que les matrices carrées.

Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles représentent une même applications linéaire dans des bases différentes.

Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme dans des bases différentes *mais* en choisissant à chaque fois la même base au départ et à l'arrivée.

B.4 - Rang d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. On appelle *rang* de A, et on note $\operatorname{rg} A$, l'entier égal à :

- le rang de la famille $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ (où $C_1, C_2, \dots, C_n$ sont les colonnes de A) dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$;
- le nombre maximal de colonnes de A linéairement indépendantes ;
- le nombre maximal de lignes de A linéairement indépendantes ;
- le rang de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E est de dimension n et F est de dimension p.

Remarques

1. Si $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ alors : $0 \leqslant \operatorname{rg} A \leqslant \min(n, p)$.
2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors : $\boxed{A \text{ inversible} \iff \operatorname{rg} A = n.}$
3. On ne modifie pas le rang de A en multipliant (à droite ou à gauche) par une matrice inversible.

   En particulier le rang d'une matrice est invariant lorsque l'on effectue des opérations sur les lignes du type
   $$L_i \leftarrow L_i + kL_j \ , \ L_i \leftarrow kL_i \text{ (avec } k \neq 0) \text{ ou } L_i \leftrightarrow L_j$$
   ou des opérations sur les colonnes du type
   $$C_i \leftarrow C_i + kC_j \ , \ C_i \leftarrow kC_i \text{ (avec } k \neq 0) \text{ ou } C_i \leftrightarrow C_j$$
   car ces opérations correspondent à des multiplications à gauche ou à droite par des matrices inversibles.
4. Pour tout $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, on a $\operatorname{rg} {}^tA = \operatorname{rg} A$.
5. On dit que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ sont *équivalentes* lorsqu'il existe $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ inversible et $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversibles telles que $B = PAQ$, c'est-à-dire qu'elles représentent une même application linéaire dans des bases différentes.

   Deux matrices de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.
6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, on a : $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(P^{-1}AP)$.

   Ainsi, si A est une matrice représentant un endomorphisme f alors $\operatorname{tr}(A)$ sera égale à la trace de n'importe quelle matrice représentant f : la trace est invariante par changement de base.

On termine avec un résultat utile mais qui n'est pas explicitement au programme.

Proposition I-9

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ une matrice de rang r alors il existe $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ inversible et $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telles que :
$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

Démonstration

B.5 - Bilan des problématiques et savoir-faire fondamentaux

B.5.a - Comment étudier la linéarité d'une application ?

SF16 **Montrer que l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images**

Pour montrer la linéarité d'une application $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, on vérifie directement la définition en considérant des vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ quelconques de E ainsi qu'un réel λ et on vérifie :

$$f(\lambda \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda \cdot f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}),$$

ou séparément :

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \text{ et } f(\lambda \cdot \mathbf{u}) = \lambda \cdot f(\mathbf{u}).$$

Exemple

Montrons la linéarité de l'application :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto f(x, y) = (x, x + y, x - y).$$

Soit $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in (\mathbb{R}^2)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on écrit $\mathbf{u} = (x, y)$ et $\mathbf{v} = (x', y')$, alors :

$$\begin{aligned}
f(\lambda \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v}) &= f\Big(\lambda.(x, y) + (x', y')\Big) \\
&= f(\lambda x + x', \lambda y + y') \\
&= \Big(\lambda x + x', (\lambda x + x') + (\lambda y + y'), (\lambda x + x') - (\lambda y + y')\Big) \\
&= \lambda \cdot (x, x + y, x - y) + (x', x' + y', x' - y') \\
&= \lambda \cdot f(x, y) + f(x', y') \\
&= \lambda \cdot f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}).
\end{aligned}$$

Donc $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

Inversement, pour montrer qu'une telle application f n'est pas linéaire, on met en défaut la définition de la linéarité en exhibant un contre-exemple explicite.

Exemples

1 ▹ Montrons que l'application suivante n'est pas linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto (x+y+z, x^2+y).$$

On a $f(1,0,0) = (1,1)$ et $f(2,0,0) = (2,4)$ donc $2 \cdot f(1,0,0) \neq f(2,0,0)$. Il s'ensuit que f n'est pas linéaire.

2 ▹ Montrons que l'application suivante n'est pas linéaire :

$$f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \mathrm{A} \mapsto f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^2.$$

On a $f(2\ \mathrm{I}_2) = 4\,\mathrm{I}_2$ alors que $2f(\mathrm{I}_2) = 2\ \mathrm{I}_2$; donc f n'est pas linéaire.

SF17 Invoquer la linéarité de transformations connues

On vérifie aisément que des applications comme la dérivation $f \mapsto f'$, l'évaluation $f \mapsto f(a)$ d'une fonction en un point, l'intégration $f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ d'une fonction continue, par exemple, ou encore $\mathrm{X} \mapsto \mathbb{E}(\mathrm{X})$ en probabilités, sont linéaires.

De telles transformations étant d'usage très fréquent, on peut les invoquer pour gagner en concision.

Par ailleurs, la somme, le produit par une constante, la composée d'applications linéaires étant linéaires, de même que l'application réciproque dans le cas bijectif, on peut parfois se contenter de montrer ou d'invoquer la linéarité de fonctions auxiliaires.

Exemple

Montrons la linéarité de l'application suivante :

$$f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x],\ \mathrm{P} \mapsto f(\mathrm{P}) = \mathrm{P}' + \mathrm{P}(0).$$

La dérivation ($\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}'$) et l'évaluation en 0 ($\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(0)$) étant linéaires sur $\mathbb{R}[x]$, on en déduit que f est linéaire comme somme d'application linéaires.

SF18 Associer une matrice à l'application

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F alors on peut associer à f sa matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Exemple

Considérons l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto (2x+y+z, -x-y+z)$.

La matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'autre part, considérons une application $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. Si l'on trouve une matrice A telle que l'on ait, pour tout $\mathbf{x} \in \mathrm{E}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\big(f(\mathbf{x})\big) = \mathrm{A}\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x})$$

alors f est linéaire et A est sa matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Exemples

1 ▹ Considérons l'application $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z,t) \mapsto (x+y-z, x+t)$.

La relation :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z \\ x+t \end{pmatrix},$$

montre que f est linéaire et que sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^2$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 ▹ Considérons l'application linéaire suivante.

$$f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x], P \mapsto f(P) \text{ avec } f(P)(x) = (1+x^2)P''(x) - 2xP'(x).$$

On a (avec abus de notation, en écrivant x^k au lieu de $x \mapsto x^k$) :

$$f(1) = 0\ ,\ f(x) = -2x\ ,\ f(x^2) = 2 - 2x^2 \text{ et } f(x^3) = 6x,$$

donc la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La colonne C_2 est la matrice des coefficients de $f(x)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$ et la colonne C_4 est celle de $f(x^3)$ donc (du fait de la linéarité) la matrice de $f(x^3+3x)$ est $C_4 + 3C_2$. Comme $C_4 + 3C_2$ est nulle, cela signifie que $f(x_3 + 3x) = 0_{\mathbb{R}[x]}$ (c'est-à-dire que $x^3 + 3x$ est dans le noyau de f).

Enfin, le fait que la dernière ligne soit intégralement nulle signifie que f est en fait à valeurs dans $\mathbb{R}_2[x]$ (c'est-à-dire que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}_2[x]$).

B.5.b - Comment déterminer l'image et le noyau d'une application ?

SF19 Résoudre un système

Déterminer le noyau d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ revient à résoudre le système $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_F$ d'inconnue $\mathbf{x} \in E$. Lorsque E est de dimension finie, cela revient à résoudre un système linaire.

Exemples

1 ▹ Déterminons le noyau de l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z,t) \mapsto (x+y+z+t, x+2y-z+t, y+2z+4t).$$

Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in \ker(f) &\iff f(x,y,z,t) = (0,0,0) \\
&\iff \big(x+y+z+t, x+2y-z+t, y+2z+4t\big) = (0,0,0) \\
&\iff \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y - z + t = 0 \\ \phantom{x +{}} y + 2z + 4t = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ \phantom{x+{}} y - 2z \phantom{{}+4t} = 0 \\ \phantom{x+y+{}} 4z + 4t = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \phantom{{}+y+z} - 2t = 0 \\ \phantom{x+{}} y \phantom{{}+z} + 2t = 0 \\ \phantom{x+y+{}} z + t = 0 \end{cases} \\
&\iff (x,y,z,t) = t \cdot (2,-2,-1,1).
\end{aligned}$$

Donc $\ker(f)$ est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^4$ engendrée par $(2,-2,-1,1)$.

2 ▹ Déterminons le noyau de l'application linéaire suivante, où $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A \mapsto AM.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on écrit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors :

$$\begin{aligned}
A \in \ker(f) &\iff f(A) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} a+b \phantom{{}+c+d} = 0 \\ \phantom{a+b+{}} c+d = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} b = -a \\ d = -c \end{cases} \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a & -a \\ c & -c \end{pmatrix} \\
&\iff A = a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc $\ker(f)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

De plus, ces deux matrices n'étant pas colinéaires, elles forment une famille libre donc il s'agit finalement d'une base de ce noyau et $\ker(f)$ est donc de dimension 2.

Déterminer l'image d'une application linéaire revient également à un problème d'équation linéaire puisque cela revient à déterminer les $\mathbf{y} \in F$ tels que l'équation $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ admette une solution.

Exemple

Déterminons l'image de l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \mathrm{P}(x) \mapsto f(\mathrm{P})(x) = x\mathrm{P}(x).$$

Soit $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[x]$, considérons l'équation $\mathrm{Q} = f(\mathrm{P})$ d'inconnue $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[x]$.

Notons qu'il ne s'agit pas de résoudre cette équation mais de déterminer les Q pour lesquels il existe des solutions.

La relation $f(\mathrm{P}) = \mathrm{Q}$ s'écrit $x\mathrm{P}(x) = \mathrm{Q}(x)$ donc Q admet 0 pour racine.

Réciproquement, si Q admet 0 pour racine alors $\mathrm{Q}(x)$ est divisible par x donc Q s'écrit $\mathrm{Q}(x) = x\mathrm{P}(x)$ avec P dans $\mathbb{R}[x]$.

Finalement, $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble des polynômes admettant 0 pour racine.

SF20 Utiliser une famille génératrice de l'espace de départ

Lorsque E est de dimension finie, l'image d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est le sous-espace de F engendré par les images d'une famille génératrice de E. Il suffit donc de considérer une telle famille génératrice (en fait, on prend souvent une base), de calculer les images des vecteurs puis, éventuellement, de simplifier la famille des images obtenue afin d'en déduire une base de l'image.

Exemples

1 ▹ Considérons l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $(x, y, z) \mapsto (x + z, x - y, x + y + 2z, y + z)$.

Calculons les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$f(1,0,0) = (1,1,1,0), f(0,1,0) = (0,-1,1,1) \text{ et } f(0,0,1) = (1,0,2,1).$$

On en déduit :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\Big((1,1,1,0),(0,-1,1,1),(1,0,2,1)\Big).$$

On remarque que le dernier vecteur est la somme des deux premiers donc :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\Big((1,1,1,0),(0,-1,1,1)\Big).$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre or ils engendrent $\mathrm{Im}(f)$ donc ils en forment une base et la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ est égale à 2.

2 ▹ Déterminons le noyau de l'application linéaire suivante, où $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \mathrm{A} \mapsto f(\mathrm{A}) = \mathrm{AM}.$$

Considérons la base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ constituée par les matrices :

$$\mathrm{E}_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{E}_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{E}_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{E}_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons les images de chacun de ces vecteurs :

$$f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$f(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Ces deux matrices ne sont pas colinéaires donc elles forment une famille libre or elles engendrent $\mathrm{Im}(f)$ donc elles en forment une base et la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ est égale à 2.

Si A est une matrice associée à f dans des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ alors les colonnes de A donnent les coordonnées (dans $\mathcal{B}'$) de vecteurs engendrant l'image de f.

Exemple

Considérons à nouveau $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4,\ (x,y,z) \mapsto (x+z, x-y, x+y+2z, y+z)$.

La matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Une famille de vecteurs engendrant $\mathrm{Im}(f)$ « se lit » sur les colonnes de A. De plus, le fait que la troisième colonne soit la somme des deux premières signifie que l'on peut se contenter de considérer les deux premières colonnes.

SF21 Exploiter la dimension du noyau ou de l'image

L'élément clef est le théorème du rang qui donne un lien entre la dimension du noyau et celle de l'image. Une fois déterminé le noyau ou l'image, on dispose donc de la dimension de l'autre.

Exemple

Déterminons le noyau et l'image de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto (x+3y-2z, 2x+6y-4z, -x-3y+2z)$.

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \ker(f) &\iff f(x,y,z) = (0,0,0) \\
&\iff (x+3y-2z, 2x+6y-4z, -x-3y+2z) = (0,0,0) \\
&\iff \begin{cases} x+3y-2z = 0 \\ 2x+6y-4z = 0 \\ -x-3y+2z = 0 \end{cases} \\
&\iff x+3y-2z = 0 \\
&\iff (x,y,z) = (-3y+2z, y, z) \\
&\iff (x,y,z) = y\cdot(-3,1,0) + z\cdot(2,0,1).
\end{aligned}$$

Donc $\ker(f)$ est engendré par les vecteurs $(-3,1,0)$ et $(2,0,1)$.

De plus, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre or ils engendrent $\ker(f)$ donc ils en forment une base et $\dim(\ker(f)) = 2$.

Le théorème du rang donne :
$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)),$$
d'où $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$. Il suffit donc de considérer un vecteur non nul dans l'image de f pour en trouver une base, par exemple :
$$f(1,0,0) = (1,2,-1)$$
est un vecteur constituant une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Une interprétation matricielle permet souvent d'obtenir rapidement le rang ce qui donne alors directement (avec le théorème du rang) les dimensions de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exemple

Déterminons le noyau et l'image de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $(x,y,z) \mapsto (-y, x-2z, y, z)$.

Considérons la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$:
$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Compte tenu des dimensions de la matrice, le rang est d'au plus 3 or les trois dernières lignes sont indépendantes donc $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 3$.

Le théorème du rang donne :
$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f),$$
on en déduit que $\ker(f)$ est de dimension 0 ce qui signifie que $\ker(f) = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$.

Enfin, l'image de f est engendré par les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$:
$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\Big((0,1,0,0), (-1,0,1,0), (0,-2,0,1)\Big).$$
Comme l'on sait qu'il s'agit d'un sous-espace de dimension 3 de $\mathbb{R}^4$, on en a obtenu une base.

SF22 Utiliser des opérations élémentaires sur les colonnes

Allons plus loin dans la traduction matricielle d'une application linéaire. Considérons $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ où $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p)$ est une base de E et $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ est une base de F.

On note $\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_p$ les colonnes de A, ce sont les matrices des vecteurs $f(\mathbf{e}_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Si une colonne C_j est nulle alors cela signifie que $f(\mathbf{e}_j) = \mathbf{0}_\mathrm{F}$ donc $\mathbf{e}_j$ est dans le noyau de f. Plus généralement, des relations entre les colonnes fournissent aisément des vecteurs du noyau. En effet, si l'on a par exemple $\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 - 2\mathrm{C}_3$ qui est nulle alors cela signifie que $f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2) - 2f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{0}_\mathrm{F}$, c'est-à-dire par linéarité $f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3) = \mathbf{0}_\mathrm{F}$ et cela montre donc que le vecteur $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$ est dans le noyau de f. Une simple observation des colonnes peut donc permettre d'obtenir des vecteurs du noyau.

Par ailleurs, des manipulations sur les colonnes ne modifient pas le rang et les nouvelles colonnes obtenues correspondent toujours à des vecteurs de l'image. En effet, une transformation $\mathrm{C}_1 \leftarrow \mathrm{C}_1 + 2\mathrm{C}_2$

par exemple signifie que l'on remplace la matrice de $f(\mathbf{e}_1)$ par celle de $f(\mathbf{e}_1)+2f(\mathbf{e}_2) = f(\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2)$ donc le vecteur de F dont les coordonnées sont données par la nouvelle colonne est encore dans l'image.

En résumé, des considérations et manipulations sur les colonnes de la matrice permettent d'obtenir de nombreux renseignements sur le noyau et l'image de l'application.

Exemple

Déterminons le noyau et l'image de l'application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^4)$ canoniquement associée à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Notons C_1, C_2, C_3, C_4 et C_5 les colonnes de A :
- on a $C_2 = 0$ donc $(0,1,0,0,0) \in \ker(f)$;
- on a $C_1 + C_4 = 0$ donc $(1,0,0,1,0) \in \ker(f)$;
- on a $2C_1 + C_3 - C_5 = 0$ donc $(2,0,1,0,-1) \in \ker(f)$.

On vérifie aisément que les trois vecteurs ci-dessus sont linéairement indépendants donc $\ker(f)$ est au moins de dimension 3.

Les colonnes C_1 et C_3 étant linéairement indépendantes, le rang de la matrice (donc de f) est au moins égal à 2.

Comme le théorème du rang donne :

$$\underbrace{\dim(\mathbb{R}^5)}_{=5} = \underbrace{\dim(\ker(f))}_{\geqslant 3} + \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f))}_{=\mathrm{rg}(f)\geqslant 2},$$

on en déduit que :

$$\dim(\ker(f)) = 3 \text{ et } \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2.$$

Les trois vecteurs précédents forment donc une base de $\ker(f)$.

De plus, les colonnes C_1 et C_3 (qui sont linéairement indépendantes) fournissent une base de l'image :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\Big((1,2,-1,2),(0,-1,2,1)\Big).$$

B.5.c - Comment déterminer des propriétés d'une application linéaire ?

SF23 Utiliser le noyau ou l'image

Une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est injective lorsque son noyau est réduit à $\{\mathbf{0}_E\}$. Comme l'inclusion $\{\mathbf{0}_E\} \subset \ker(f)$ est toujours vraie, il suffit en fait de montrer que si $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_F$ alors $\mathbf{x} = \mathbf{0}_E$.

Exemples

1 ▹ Montrons que l'application linéaire suivante est injective :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (x+y, 2x-y, x+2y).$$

Soit $(x,y) \in \ker(f)$, on a $f(x,y) = (0,0,0)$.

Cela revient à $(x+y, 2x-y, x+2y) = (0,0,0)$, ce qui correspond au système :

$$\begin{cases} x + \ \ y = 0 \\ 2x - \ \ y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases},$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} x + \ \ y = 0 \\ \ \ -3y = 0 \\ \ \ \ \ \ \ y = 0 \end{cases},$$

donc $(x,y) = (0,0)$. Donc $\ker(f) = \{(0,0)\}$ et il s'ensuit que f est injective.

2 ▹ Montrons que l'application linéaire suivante est injective :

$$f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \mathrm{P}(x) \mapsto x\mathrm{P}(x).$$

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[x]$ tel que $f(\mathrm{P}) = 0_{\mathbb{R}[x]}$.

On a donc $x \mapsto x\mathrm{P}(x)$ nul ce qui n'est possible que si P est nul.

Donc $\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}[x]}\}$ c'est-à-dire que f est injective.

D'autre part, une application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est surjective lorsque son image est égale à F.

Comme l'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{F}$ est toujours vraie, il suffit en fait de montrer que pour tout vecteur $\mathbf{y} \in \mathrm{F}$, il existe un vecteur $\mathbf{x} \in \mathrm{E}$ tel que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

Exemples

1 ▹ Montrer que l'application linéaire suivante est surjective :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \ (x,y,z) \mapsto (x+y+z, x+2y).$$

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} f(x,y) = (a,b) &\iff \begin{cases} x + \ \ y + z = a \\ x + 2y \ \ \ \ \ \ = b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y + z = a \\ \ \ \ \ \ \ y - z = b - a \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \ \ \ \ \ \ + 2z = 2a - b \\ \ \ \ \ \ \ y - \ \ z = b - a \end{cases}. \end{aligned}$$

On en déduit par exemple que $f(2a-b, b-a, 0) = (a,b)$.

Donc f est surjective.

2 ▹ Montrer que l'application linéaire suivante est surjective :

$$f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}'.$$

Soit $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[x]$, on écrit $\mathrm{Q}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k x^k$ où les a_k sont réels.

On a alors (avec un abus de notation) :

$$\left(\sum_{k=0}^{d} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}\right)' = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k,$$

ce qui signifie que $Q = f(P)$ avec $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$.

Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}[x]$ c'est-à-dire que f est surjective.

3 ▹ Montrons qu'une forme linéaire non nulle est toujours surjective.

Considérons une forme linéaire non nulle $f : E \to \mathbb{R}$.

Comme f est non nulle, on a $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$ or $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ ne contient que deux sous-espaces vectoriels : $\{0\}$ et $\mathbb{R}$. Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ et f est surjective.

SF24 Montrer qu'une application linéaire est bijective

On peut bien entendu utiliser les idées précédentes pour montrer séparément l'injectivité et la surjectivité.

Un cas particulier important est celui où la dimension de l'espace de départ est la même que celle de celui d'arrivée. Dans ce cas, montrer l'injectivité ou la surjectivité permet d'en déduire la bijectivité.

De façon générale, on ne peut envisager la bijectivité de l'application que dans le cas où les dimensions du départ et de l'arrivée sont les mêmes.

Exemples

1 ▹ Montrons la bijectivité de l'application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, calculons le rang de A en effectuant des opérations sur les lignes.

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ donnent :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix},$$

puis l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ donne :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 3.$$

Par conséquent A est inversible et f est bijective.

On pourrait aussi, par exemple, déterminer le noyau.

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \ker(f) &\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \\ -x + 5z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ y + z = 0 \\ 2y + 8z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ y + z = 0 \\ 6z = 0 \end{cases} \\
&\iff (x,y,z) = (0,0,0)
\end{aligned}$$

d'où $\ker(f) = \{(0,0,0)\}$.

On en déduit que f est injective or f est un endormorphisme de $\mathbb{R}^3$ donc f est bijective.

2 ▹ Montrons que l'application linéaire suivante est bijective :

$$f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3,\ \mathrm{P} \mapsto f(\mathrm{P}) = \big(\mathrm{P}(-1), \mathrm{P}(0), \mathrm{P}(1)\big).$$

Soit $\mathrm{P} \in \ker(f)$, on a $f(\mathrm{P}) = 0$ ce qui signifie que -1, 0 et 1 sont des racines de P. Comme P est de degré au plus 2 et admet au moins 3 racines distinctes, on en déduit que P est le polynôme nul. Donc $\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}[x]}\}$ et f est injective.

Comme on a de plus :

$$\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3),$$

on en déduit que f est bijective.

SF25 Étudier le rang et l'inversibilité d'une matrice

Si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ avec E et F de même dimension finie n et si A est une matrice représentant f alors on a équivalence entre toutes les assertions suivantes :

- ◇ f bijective,
- ◇ f injective,
- ◇ f surjective,
- ◇ $\ker(f) = \{\mathbf{0}_\mathrm{E}\}$,
- ◇ $\dim(\ker(f)) = 0$,
- ◇ $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{F}$,
- ◇ $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n$,
- ◇ $\mathrm{rg}(f) = n$,
- ◇ $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = n$,
- ◇ les colonnes de A sont linéairement indépendantes,
- ◇ les lignes de A sont linéairement indépendantes,
- ◇ A inversible,
- ◇ le système $\mathrm{AX} = 0$ n'admet que la solution nulle,
- ◇ et tout système de la forme $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ admet une unique solution.

Exemple

Montrons que l'application linéaire suivante est bijective :

$$f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x],\ \mathrm{P} \mapsto f(\mathrm{P}) = \mathrm{P} + \mathrm{P}'.$$

Tout d'abord la linéarité de f provient de la linéarité de la dérivation.

La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ est :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de rang égal à 3 donc est inversible (on pourrait aussi dire qu'elle est triangulaire à coefficients tous non nuls) donc f est bijective.

SF26 Exploiter une relation polynomiale

Supposons que l'on dispose d'une relation polynomiale sur une matrice carrée $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme :

$$a_d \mathrm{A}^d + a_{d-1}\mathrm{A}^{d-1} + \cdots + a_1 \mathrm{A} + a_0 \mathrm{I}_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})},$$

où les a_k sont des scalaires. Si a_0 est non nul alors A est inversible et A^{-1} s'obtient aisément à l'aide de cette relation en factorisant par A.

Le même principe s'applique dans le cas d'une relation polynomiale sur un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ de la forme :

$$a_d f^d + a_{d-1} f^{d-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \,\mathrm{id}_\mathrm{E} = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}.$$

Exemple

Étudions l'inversibilité de la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 & 6 \\ -3 & -4 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -4 & -3 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Un calcul donne :

$$\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 6 & 6 \\ -3 & -2 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -2 & -3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{A} + 2\mathrm{I}_4.$$

On a $\mathrm{A}^2 - \mathrm{A} = 2\mathrm{I}_4$, d'où :

$$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}\mathrm{A} - \frac{1}{2}\mathrm{I}_4\right) = \mathrm{I}_4,$$

donc A est inversible et :

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{2}\mathrm{A} - \frac{1}{2}\mathrm{I}_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 & 6 \\ -3 & -5 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

B.5.d - Comment passer d'une base à une autre ?

SF27 **Considérer une matrice de passage**

Supposons que l'on dispose d'une base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e_n})$ de E et que l'on considère n vecteurs $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ de E ; on note P la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont la j-ème colonne est la matrice de $\mathbf{e}'_j$ dans la base $\mathcal{B}$.

Dans ces conditions, la matrice P est inversible si et seulement si la famille $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ est également une base de E ; on dit alors que P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

Cela correspond à la matrice de l'application id_E en choisissant la base $\mathcal{B}'$ au départ et la base $\mathcal{B}$ à l'arrivée.

Si l'on souhaite obtenir la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$, on peut soit inverser la matrice P, soit manipuler un système pour exprimer les vecteurs $\mathbf{e}_k$ en fonction des vecteurs $\mathbf{e}'_j$.

Exemple

Considérons les polynômes $\Pi_1(x) = (x-1)(x+1)$, $\Pi_2(x) = x(x+1)$ et $\Pi_3(x) = x(x-1)$.

La matrice $P = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ a pour colonnes les composantes de ces trois polynômes dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$.

L'opération $C_3 \leftarrow C_3 + C_2$ donne :

$$\mathrm{rg}(P) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3,$$

donc $\left(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$ et la matrice de passage cherchée est la matrice P définie ci-dessus.

On a :

$$\begin{cases} \Pi_1(x) = -1 + x^2 \\ \Pi_2(x) = x + x^2 \\ \Pi_3(x) = -x + x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \Pi_1(x) = -1 + x^2 \\ \Pi_2(x) = x + x^2 \\ \Pi_2(x) + \Pi_3(x) = 2x^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \Pi_1(x) - \frac{1}{2}\Pi_2(x) - \frac{1}{2}\Pi_3(x) = -1 \\ \frac{1}{2}\Pi_2(x) - \frac{1}{2}\Pi_3(x) = x \\ \Pi_2(x) + \Pi_3(x) = 2x^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\Pi_1(x) + \frac{1}{2}\Pi_2(x) + \frac{1}{2}\Pi_3(x) = 1 \\ \frac{1}{2}\Pi_2(x) - \frac{1}{2}\Pi_3(x) = x \\ \frac{1}{2}\Pi_2(x) + \frac{1}{2}\Pi_3(x) = x^2, \end{cases}$$

ce qui donne la matrice de passage de la base (Π_1, Π_2, Π_3) vers la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

SF28 **Exprimer un vecteur ou un endomorphisme dans une nouvelle base**

Si f est un endomorphisme de E de matrice A dans une base $\mathcal{B}$ et $\mathbf{x}$ est un vecteur de E de matrice X dans cette base alors on obtient les matrices A' de f et X' de $\mathbf{x}$ dans une base $\mathcal{B}'$ de E à l'aide des relations :

$$A' = P^{-1}AP \;\text{ et }\; X = PX', \text{ où P est la matrice de passage de } \mathcal{B} \text{ à } \mathcal{B}'.$$

Exemple

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminons la matrice A′ de f dans la base de $\mathbb{R}^3$ constituée par les vecteurs $\mathbf{e}_1 = (1,0,1)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$ et $\mathbf{e}_3 = (-1,0,1)$.

Considérons la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'autre part, on a :

$$\frac{1}{2}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_3 = (1,0,0) \text{ et } \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_3 = (0,0,1),$$

d'où :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quelques exercices d'application

Exercice C-11

Montrer la linéarité des applications suivantes puis déterminer le noyau et l'image.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (2x-y, x+y, x)$;
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto (x, 2x, x)$;
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto x+y+2z$;
4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto (2x+3y, x-z, 3x)$.
5. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y, y-x, 0) \end{array}$
6. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, y-z, z-x) \end{array}$
7. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+z, y-z, x+y+z, x-y-z) \end{array}.$
8. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, y+z, x+y+z) \end{array}$
9. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P(x) & \longmapsto & x^2P'(x) \end{array}$

Exercice C-12

On considère une base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer une base du noyau et une base de l'image de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice C-13

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à la matrice : $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -4 & 8 & 4 \\ 5 & -10 & -5 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le noyau et l'image de f.

2. Montrer que $f \circ f = f$.

Exercice C-14

On considère l'application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ donnée par :

$$f(x, y, z) = (-x + z, -y + z, x - 2y + z).$$

1. Déterminer le noyau et l'image puis vérifier que : $\ker(f) \subset \mathrm{Im}(f)$.

2. Calculer $(f \circ f)(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

3. En déduire l'image et le noyau de $f \circ f$.

Exercice C-15

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ deux applications linéaires.

1. Montrer que $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.

2. En déduire que si $g \circ f$ est un isomorphisme alors f est injective et g est surjective.

3. On suppose que $h \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p)$, montrer que :

$$\ker(h) = \ker(h \circ h) \iff \mathrm{Im}(h) = \mathrm{Im}(h \circ h).$$

Exercice C-16

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à la matrice :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 2 & 0 & c \\ d & 1 & e \end{pmatrix},$$

où a, b, c, d et e sont des réels.

Déterminer les coefficients de A de sorte que :

$$(1, 0, 1) \in \ker(f) \;\text{ et }\; \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big((1, 0, 1), (0, 1, 0)\big).$$

Exercice C-17

Pour tout réel a, on considère l'application $f_a \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à la matrice :

$$\mathrm{M}_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & 1 \\ 1 & a & a \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs de a, l'application f_a est-elle bijective ?

Calculer l'image et le noyau dans les autres cas.

Exercice C-18

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et f_α l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f_\alpha(x, y, z, t) = (x + y + \alpha z + t, x + z + t, y + z).$$

Déterminer, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, les espaces vectoriels $\ker(f_\alpha)$ et $\mathrm{Im}(f_\alpha)$.

Exercice C-19

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E qui commutent.

Montrer que $\ker f$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.

Rappel : si f est un endomorphisme de E, on dit qu'un sous-espace F de E est stable par f si $f(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$; autrement dit si pour tout $\mathbf{u} \in \mathrm{F}$, $f(\mathbf{u}) \in \mathrm{F}$.

Exercice C-20

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

On note f^i la composée $f \circ f \circ \cdots \circ f$ (i fois).

1. Montrer que $\ker(f^i) \subset \ker(f^{i+1})$ pour tout entier naturel i.
2. Démontrer qu'il existe un indice $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\ker(f^p) = \ker(f^{p+1}).$$

Exercice C-21

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -16 & 5 \\ 2 & 4 & -14 & 4 \\ 1 & -7 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. On considère les quatre vecteurs $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (4, 1, 0, -3)$ et $\mathbf{e}_4 = (-3, 0, 1, 5)$. Montrer que $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. On considère les trois vecteurs $\mathbf{f}_1 = (3, 2, 1)$, $\mathbf{f}_2 = (1, 1, -1)$ et $\mathbf{f}_3 = (0, 0, 1)$. Montrer que $\mathcal{C} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Exercice C-22

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère les trois vecteurs $\mathbf{e}_1 = (1,-1,0)$, $\mathbf{e}_2 = (1,1,0)$ et $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Calculer la matrice T de u dans la base $\mathcal{B}$.

3. Calculer T^n puis A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice C-23

On considère une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $n+1$ points $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ de l'intervalle $[a,b]$.

1. En considérant l'application :

$$\varphi : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}^{n+1}, P \mapsto \big(P(\alpha_0), P(\alpha_1), \cdots, P(\alpha_n)\big),$$

montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que pour tout entier i compris entre 0 et n, $P(\alpha_i) = f(\alpha_i)$.

2. On considère désormais que f est dérivable.

Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[x]$ tel que :

$$\forall i \in [\![0,n]\!],\ P(\alpha_i) = f(\alpha_i) \text{ et } P'(\alpha_i) = f'(\alpha_i).$$

Exercice C-24

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -5 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^3 - 2A^2 - A + 2I_3$ et en déduire que A est inversible.

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Calculer $B^4 - 3B^2 - 2B$. Peut-on en déduire que B est inversible ?

3. Soit $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Calculer $C^4 - C^2$. Peut-on en déduire que C est inversible ?

Exercice C-25

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E.

On suppose que $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$ mais que $f^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ *i.e.* il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$.

Montrer que la famille $\mathcal{B} = \big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\big)$ est une base de E puis écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.