CHAPITRE II

SUITES ET FONCTIONS - RÉVISIONS

Exercice C-26

Calculer les limites des fonctions suivantes, au point indiqué :

1. $x \mapsto \dfrac{x^3+3x^2-4}{x^3+5x^2+8x+4}$ en -2.
2. $x \mapsto \dfrac{\sin(3x)}{\sqrt{1-\cos(x)}}$ en 0.
3. $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1}-1}$ en 0.
4. $x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$ en 0.
5. $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^2}$ en 0.
6. $x \mapsto \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x-2}$ en $+\infty$.

1. Il y a une forme indéterminée puisque -2 est racine du numérateur et du dénominateur. Factorisons ces deux termes par $x+2$:

$$x^3+3x^2-4 = (x+2)(x^2+x-2) = (x+2)^2(x-1),$$

et :

$$x^3+5x^2+8x+4 = (x+2)(x^2+3x+2) = (x+2)^2(x+1),$$

donc :

$$\frac{x^3+3x^2-4}{x^3+5x^2+8x+4} = \frac{x-1}{x+1} \xrightarrow[x\to-2]{} 3.$$

2. Il y a une forme indéterminée mais on a :

$$\sin(3x) \underset{0}{\sim} 3x,$$

$$1-\cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}x^2,$$

d'où :

$$\frac{\sin(3x)}{\sqrt{1-\cos(x)}} \underset{0}{\sim} \frac{3x}{\sqrt{\frac{1}{2}x^2}},$$

soit :

$$\frac{\sin(3x)}{\sqrt{1-\cos(x)}} \underset{0}{\sim} 3\sqrt{2}\,\frac{x}{|x|}.$$

On en déduit :

$$\frac{\sin(3x)}{\sqrt{1-\cos(x)}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 3\sqrt{2},$$

et :

$$\frac{\sin(3x)}{\sqrt{1-\cos(x)}} \xrightarrow[x\to 0^-]{} -3\sqrt{2}.$$

3. On a :

$$\sqrt{1+u} \underset{0}{=} 1+\frac{1}{2}u+o(u),$$

d'où :

$$\sqrt{x+1}-1 \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}x,$$

$$\sqrt{x+4} = 2\sqrt{1+\frac{1}{4}x} \underset{0}{=} 2+\frac{1}{4}x+o(x),$$

$$\sqrt{3x+4} = 2\sqrt{1+\frac{3}{4}x} \underset{0}{=} 2+\frac{3}{4}x+o(x),$$

d'où :

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+4} \underset{0}{=} -\frac{1}{2}x+o(x),$$

puis :

$$\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1}-1} \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x},$$

donc :

$$\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1}-1} \xrightarrow[x\to 0]{} -1.$$

4. On a tout d'abord :

$$\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2} = \frac{x^2-\sin^2(x)}{x^2\sin^2(x)}.$$

Puisque :

$$\sin(x) \underset{0}{=} x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4),$$

on a :

$$\sin^2(x) \underset{0}{=} x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4),$$

donc :

$$x^2-\sin^2(x) \underset{0}{=} \frac{1}{3}x^4+o(x^4),$$

d'où :

$$\frac{x^2-\sin^2(x)}{x^2\sin^2(x)} \underset{0}{\sim} \frac{\frac{1}{3}x^4}{x^4}$$

puis :

$$\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{3}.$$

5. On a :

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2),$$

$$\ln(1-x) \underset{0}{=} -x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2),$$

donc :

$$\ln(1+x)+\ln(1-x) \underset{0}{=} -x^2+o(x^2),$$

puis :

$$\frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} -1.$$

6. On a :

$$\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x-2} = \mathrm{e}^{(3x-2)\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}.$$

On a :

$$\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \underset{0}{=} \frac{2}{x}-\frac{1}{2}\frac{2^2}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

puis :

$$(3x+2)\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \underset{0}{=} 6-\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right),$$

et finalement :

$$\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x-2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \mathrm{e}^6.$$

Exercice C-28

1. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un unique réel noté u_n vérifiant la relation :

$$\int_n^{u_n} \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = 1.$$

2. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\mathrm{e}^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n-n \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}.$$

3. Montrer que pour tout réel positif t, on a : $\sqrt{1+t}\leqslant 1+\frac{1}{2}t$.
4. En déduire que pour tout entier $n\geqslant 1$, on a :

$$\mathrm{e}^{-\sqrt{n}-\frac{u_n-n}{2\sqrt{n}}} \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{u_n}}.$$

5. Montrer que : $u_n-n\sim \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Notons f la primitive de $t\mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{t}}$ sur $\mathbb{R}_+$ qui s'annule en n ; il s'agit d'une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$f'(t)=\mathrm{e}^{\sqrt{t}}>0,$$

donc f est strictement croissante. Il s'ensuit que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers son image. De plus, on a $f(n)=0$ et, l'inégalité $\mathrm{e}^{\sqrt{t}}>1$ permet d'écrire par croissance de l'intégrale :

$$f(x)=\int_n^x \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \geqslant \int_n^x 1\mathrm{d}t = x-n,$$

donc, par minoration, f tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Puisque $1\in[n,+\infty[$, on en déduit que l'équation :

$$f(x)=1,$$

admet une unique solution dans l'intervalle $[n,+\infty[$, que l'on note u_n. On a donc :

$$\int_n^{u_n} \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = 1.$$

2. Pour tout $t \in [n, u_n]$, on a :
$$e^{\sqrt{n}} \leqslant e^{\sqrt{t}} \leqslant e^{\sqrt{u_n}},$$
d'où, par croissance de l'intégrale :
$$\int_n^{u_n} e^{\sqrt{n}} dt \leqslant \int_n^{u_n} e^{\sqrt{t}} dt \leqslant \int_n^{u_n} e^{\sqrt{u_n}} dt,$$
c'est-à-dire :
$$(u_n - n)e^{\sqrt{n}} \leqslant 1 \leqslant (u_n - n)e^{\sqrt{u_n}}.$$
La première inégalité donne :
$$u_n - n \leqslant e^{-\sqrt{n}},$$
et le seconde inégalité donne :
$$e^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n.$$

3. Pour tout réel positif t, on a :
$$\begin{aligned} \sqrt{1+t} &\leqslant \sqrt{1 + t + \frac{1}{4}t^2} \\ &\leqslant \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}t\right)^2} \\ &\leqslant \left|1 + \frac{1}{2}t\right| \\ &\leqslant 1 + \frac{1}{2}t. \end{aligned}$$

4. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n \geqslant n$ donc $\frac{u_n - n}{n} \geqslant 0$ et on peut utiliser l'inégalité précédente :
$$\sqrt{\frac{u_n - n}{n} + 1} \leqslant 1 + \frac{1}{2}\frac{u_n - n}{n},$$
d'où en multipliant de part et d'autre par $\sqrt{n}$:
$$\sqrt{u_n} \leqslant \sqrt{n} + \frac{1}{2}\frac{u_n - n}{\sqrt{n}},$$
puis :
$$e^{-\sqrt{u_n}} \geqslant e^{-\sqrt{n} - \frac{1}{2}\frac{u_n - n}{\sqrt{n}}}.$$

5. Tout d'abord, on rappelle que pour tout $n \geqslant 1$:
$$0 \leqslant e^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n \leqslant e^{-\sqrt{n}}.$$
Il s'ensuit, par théorème d'encadrement, que $(u_n - n)$ converge vers 0.
D'autre part, en utilisant la question précédente, il vient :
$$e^{-\sqrt{n} - \frac{1}{2}\frac{u_n - n}{\sqrt{n}}} \leqslant u_n - n \leqslant e^{-\sqrt{n}},$$
puis :
$$e^{-\frac{1}{2}\frac{u_n - n}{\sqrt{n}}} \leqslant \frac{u_n - n}{e^{-\sqrt{n}}} \leqslant 1.$$
Puisque $(u_n - n)$ converge vers 0, on a :
$$-\frac{1}{2}\frac{u_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$$

donc :

$$e^{-\frac{1}{2}\frac{u_n-n}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$

et par encadrement :

$$\frac{u_n-n}{e^{-\sqrt{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$

c'est-à-dire $u_n - n \sim e^{-\sqrt{n}}$.

Exercice C-29

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n - 1.$$

1. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n avec $0 < x_n < 1$.

2. Étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$.

3. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a : $x_n(1 - x_n^n) = 1 - x_n$.

4. Montrer que la suite $\left(x_n^n\right)_{n\geqslant 2}$ converge vers 0.

5. Étudier la convergence et la limite éventuelle de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$.

1. Soit $n \geqslant 2$. La fonction f_n est polynomiale donc dérivable sur $[0,1]$ et :

$$f_n'(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} > 0,$$

Il s'ensuit que f_n est strictement croissante, sur $[0,1]$, et continue donc f_n réalise une bijection de $[0,1]$ vers l'intervalle :

$$f_n([0,1]) = [-1, n-1].$$

Comme $n \geqslant 2$, on a $0 \in f_n([0,1])$ donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution x_n, et une seule, dans l'intervalle $[0,1]$. De plus $f_n(0) < 0$ et $f_n(1) > 0$ donc $0 < x_n < 1$.

2. Soit $n \geqslant 2$, on a :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x_n) &= \sum_{k=1}^{n+1} x_n^k - 1 \\ &= f_n(x_n) + x_n^{n+1} \\ &= 0 + x_n^{n+1} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Compte tenu de la stricte croissance de f_{n+1} et du fait que $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, cela permet d'affirmer que $x_{n+1} < x_n$:

x	0		x_{n+1}		x_n		1
f_{n+1}	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	> 0	$\nearrow$	$n-1$

La suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est donc strictement décroissante.

3. Soit $n \geqslant 2$, on a par définition de x_n :

$$\sum_{k=1}^{n} x_n^k = 1,$$

d'où puisque $x_n \neq 1$:

$$x_n \frac{1-x_n^n}{1-x_n} = 1,$$

puis :

$$x_n(1-x_n^n) = 1 - x_n.$$

4. La décroissance de la suite donne pour tout $n \geqslant 2$:

$$0 \leqslant x_n^n \leqslant x_2^n.$$

Comme $0 < x_2 < 1$, la suite géométrique (x_2^n) converge vers 0 d'où, par encadrement :

$$x_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

5. La suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante et minorée (par 0) donc elle converge ; notons ℓ sa limite.
La relation :

$$x_n(1-x_n^n) = 1 - x_n,$$

donne alors en passant à la limite et en utilisant la question précédente :

$$\ell \times 1 = 1 - \ell,$$

donc $\ell = \frac{1}{2}$:

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

Exercice C-30

Étudier la convergence et la limite éventuelle de la suite u donnée par :

1. $u_n = \dfrac{\sin(n^2) - \cos(n)}{n}$;

2. $u_n = \dfrac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$;

3. $u_n = 3^n - n$;

4. $u_n = \dfrac{n^3 + 5n}{5n^3 + \cos(n) + \frac{1}{n^2}}$;

5. $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$;

6. $u_n = \sqrt{n + \cos(n)} - \sqrt{n}$;

7. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$;

8. $u_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$;

9. $u_n = \dfrac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2}$ avec x réel fixé ;

10. $u_n = \left(\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \right)^{\frac{1}{n^3}}$;

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |u_n| &= \left|\frac{\sin(n^2) - \cos(n)}{n}\right| \\ &\leqslant \frac{\left|\sin(n^2)\right| + |\cos(n)|}{n} \\ &\leqslant \frac{2}{n}, \end{aligned}$$

or :

$$\frac{2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

donc par théorème d'encadrement :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

2. On factorise par 3^n puis on simplifie :

$$u_n = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n},$$

or la suite géométrique $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)_n$ converge vers 0 donc la suite u converge vers 1.

3. On a $n = o(3^n)$ donc u diverge vers $+\infty$.

4. On factorise par n^3 puis on simplifie :

$$u_n = \frac{1 + \frac{5}{n^2}}{5 + \frac{\cos(n)}{n^3} + \frac{1}{n^3}}.$$

On a :

$$\frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \ \frac{1}{n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et :

$$\left|\frac{\cos(n)}{n^3}\right| \leqslant \frac{1}{n^3},$$

d'où par majoration, somme et quotient de limites :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{5}.$$

5. C'est la même méthode :

$$u_n = \frac{2 + \frac{(-1)^n}{n}}{5 - \frac{(-1)^n}{n}}.$$

On a :

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty 0]{},$$

d'où :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{5}.$$

6. On comment par multiplier par la quantité conjuguée :

$$u_n = \frac{\big(n + \cos(n)\big) - n}{\sqrt{n + \cos(n)} + \sqrt{n}},$$

puis on simplifie et on majore en valeur absolue :

$$\begin{aligned}|u_n| &= \frac{|\cos(n)|}{\sqrt{n+\cos(n)}+\sqrt{n}}\\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\\ &\leqslant \frac{1}{2\sqrt{n-1}}.\end{aligned}$$

On a :

$$\frac{1}{\sqrt{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

d'où par théorème d'encadrement :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

7. On encadre chaque terme de la somme en tenant compte des valeurs extrêmes de k :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+0}},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{n+1}{n},$$

ou encore :

$$\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \leqslant u_n \leqslant 1+\frac{1}{n}.$$

Puisque $\frac{1}{n}$ tend vers 0, on obtient par théorème d'encadrement :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

8. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \geqslant n^2$ donc :

$$u_n \geqslant \frac{n^2}{n} = n.$$

Puisque $n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on déduit du théorème de minoration que u diverge vers $+\infty$.

9. On utilise l'encadrement :

$$kx-1 < \lfloor kx \rfloor \leqslant kx,$$

cela donne :

$$\sum_{k=1}^{n}(kx-1) < \sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor \leqslant \sum_{k=1}^{n} kx,$$

d'où :

$$x\frac{n(n+1)}{2} - n < \sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor \leqslant x\frac{n(n+1)}{2}$$

et enfin en divisant par n^2 :

$$x\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{n} < u_n \leqslant x\frac{n+1}{2n}.$$

On a $\frac{1}{n}$ qui tend vers 0 et :

$$\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

Les deux termes latéraux tendent donc vers $\frac{x}{2}$ donc par théorème d'encadrement :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x}{2}.$$

10. Tout d'abord, on a $\binom{n}{k} \leqslant 2^n$ par exemple parce qu'un ensemble à n éléments contient 2^n parties et $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$, on a :

$$1 \leqslant \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \leqslant \prod_{k=0}^{n} 2^n,$$

d'où :

$$1 \leqslant \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \leqslant 2^{n(n+1)},$$

puis :

$$1 \leqslant u_n \leqslant \left(2^{n(n+1)}\right)^{\frac{1}{n^3}}.$$

On a donc, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^{\frac{n(n+1)}{n^3}\ln(2)}.$$

On a :

$$\frac{n(n+1)}{n^3}\ln(2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ donc } \mathrm{e}^{\frac{n(n+1)}{n^3}\ln(2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$

et on obtient par théorème d'encadrement :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Exercice C-31

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose : $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

1. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

2. En déduire la convergence de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$.

3. À l'aide d'un programme en Python, déterminer une valeur approchée de la somme de cette série.

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_{2(n+1)} - \mathrm{S}_{2n} &= \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} \\ &> 0\end{aligned}$$

donc (S_{2n}) est croissante, et :

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_{2(n+1)+1} - \mathrm{S}_{2n+1} &= \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} \\ &< 0\end{aligned}$$

donc (S_{2n+1}) est décroissante. De plus :

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ces deux suites sont donc adjacentes.

2. Puisque les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, elles convergent vers la même limite et il s'ensuit que la suite (S_n) converge vers cette limite.
3. Pour le calcul itératif de S_{2n} et S_{2n+1}, on remarque que :

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1}$$

et on fait porter la condition sur ce terme.

```
n=1
u=1.-1/2
v=u+1/(2*n+1)
while abs(u-v)>1E-5:
    n=n+1
    u=u+1/(2*n-1)-1/(2*n)
    v=u+1/(2*n+1)
print((u+v)/2)
```

Exercice C-32

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}.$$

On note $\mathscr{C}$ son graphe dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$.

1. Étudier les variations de f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ puis déterminer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T.
3. Montrer que $f(x) + f(-x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis interpréter géométriquement.

1. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto 1 + e^x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc, étant obtenue par somme et quotient de fonctions dérivables, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x.e^x}{(1+e^x)^2}\ \textit{i.e.}\ f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}.$$

L'exponentielle étant à valeurs strictement positives, on a $f'(x) > 0$ pour tout x réel donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. ***a.*** On a $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f'(0) = \frac{1}{4}$ donc une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ est :

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.$$

b. La fonction φ est la différence entre une fonction polynomiale et f donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) &= \frac{1}{4} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{(1+e^x)^2 - 4e^x}{4(1+e^x)^2} \\ &= \frac{1+2e^x+(e^x)^2-4e^x}{4(1+e^x)^2} \\ &= \frac{1-2e^x+(e^x)^2}{4(1+e^x)^2} \\ &= \frac{(1-e^x)^2}{4(1+e^x)^2} \\ &\geqslant 0\end{aligned}$$

et cela ne s'annule qu'en 0.

Donc φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, on a $\varphi(0) = 0$ donc :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x < f(x) \text{ pour } x < 0$$

et

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x > f(x) \text{ pour } x > 0$$

i.e. $\mathscr{C}$ est au dessus de T pour $x < 0$ et $\mathscr{C}$ est en dessous de T pour $x > 0$.

3. ***a.*** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}f(x) + f(-x) &= \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \\ &= \frac{e^x(1+e^{-x}) + e^{-x}(1+e^x)}{(1+e^{-x})(1+e^x)} \\ &= \frac{e^x + e^{-x} + 2}{(1+e^{-x})(1+e^x)} \\ &= 1 \text{ (en développant le dénominateur)}\end{aligned}$$

d'où la relation annoncée.

b. Notons $M(x, f(x))$ et $N(-x, f(-x))$ les points de la courbe d'abscisses x et $-x$. D'après la relation précédente, le milieu du segment [MN] est le point $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

On en déduit que le point A est un centre de symétrie de la courbe.

Exercice C-33

La fonction $x \mapsto \dfrac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}$ a-t-elle une limite en $+\infty$?

Tout d'abord, on a $n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et :

$$\frac{n^n}{\lfloor n \rfloor^{\lfloor n \rfloor}} = \frac{n^n}{n^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

D'autre part, on a $n+\frac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et :

$$\begin{aligned}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{\lfloor n+\frac{1}{2}\rfloor^{\lfloor n+\frac{1}{2}\rfloor}} &= \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{n}\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{n^n} \\ &= \underbrace{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{1/2}} \sqrt{n+\frac{1}{2}} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.\end{aligned}$$

Ces deux limites sont différentes donc il n'y a pas de limite en $+\infty$.

Exercice C-34

Considérons une fonction continue $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ vérifiant :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) < x.$$

1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. Considérons deux réels a et b avec $0 < a < b$. Montrer qu'il existe un réel M tel que :

$$0 \leqslant \mathrm{M} < 1 \ \text{ et } \ \forall\, x \in [a,b],\ f(x) \leqslant \mathrm{M}x.$$

1. On a pour tout $x > 0$: $0 \leqslant f(x) < x$.
De plus $x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc, par théorème d'encadrement : $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
Puisque f est supposée continue en 0, on a donc $f(0) = 0$.

2. Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ donnée par : $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.
Puisque $0 < a < b$, les fonctions f et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont continues sur $[a,b]$ donc, par produit, g est continue sur $[a,b]$.
La fonction g est continue sur le segment $[a,b]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes) sur $[a,b]$.
En particulier, il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$\forall x \in [a,b],\ g(x) \leqslant g(c).$$

En posant $\mathrm{M} = g(c)$, on a donc :

$$\forall x \in [a,b],\ \frac{f(x)}{x} \leqslant \mathrm{M} \text{ donc } f(x) \leqslant \mathrm{M}x.$$

Enfin, l'hypothèse sur f montre que $0 \leqslant f(c) < c$ donc $0 \leqslant \mathrm{M} < 1$.

Exercice C-35

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$.
3. $h : [0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos\left(\sqrt{x}\right)$.

1. La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc, par composition, puis par produit avec la fonction dérivable $x \mapsto x$, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Pour l'étude en 0, on écrit :
$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \sin\left(\frac{1}{h}\right).$$
On a vu que sin n'a pas de limite en $+\infty$ donc l'expression précédente n'a pas de limite en 0 et f n'est donc pas dérivable en 0.
2. La fonction g coïncide avec la fonction rationnelle $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et avec la fonction rationnelle $x \mapsto \frac{x}{1-x}$ sur $\mathbb{R}_-^*$, on en déduit que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Pour l'étude en 0, on écrit :
$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{1}{1+|x|} \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$$
donc g est dérivable en 0 avec $g'(0) = 0$.
3. Là encore, on a la dérivabilité sur $\mathbb{R}_+^*$ par composition et se pose la question de la dérivabilité à droite en 0. On écrit :
$$\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)-1}{x},$$
puis :
$$\frac{h(x)-h(0)}{x-0} \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{x},$$
donc :
$$\frac{h(x)-h(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2},$$
et il s'ensuit que h est dérivable (à droite) en 0 de dérivée égale à $-\frac{1}{2}$.

Exercice C-37

Soit P un polynôme à coefficients réels de degré $d \geqslant 2$.

1. Montrer que si les racines de P sont toutes réelles et simples alors il en est de même de celles de P′.
2. Montrer que si P est scindé alors P′ est scindé.

1. Par hypothèse, P admet d racines distinctes que l'on note :
$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_d.$$
Soit $k \in [\![1, d-1]\!]$, la fonction P étant polynomiale, elle est continue sur $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ et dérivable sur $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$, de plus on a :
$$\mathrm{P}(\alpha_k) = \mathrm{P}(\alpha_{k+1}) = 0.$$
D'après le théorème de Rolle, il existe $\beta_k \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ tel que $\mathrm{P}'(\beta_k) = 0$.
On en déduit $d-1$ racines distinctes pour P′ qui est de degré $d-1$ donc il s'agit de toutes les racines de P′ qui sont donc bien toutes réelles et simples.

2. On suppose que P est scindé ce qui permet de l'écrire sous la forme :

$$\mathrm{P} = \lambda \prod_{k=1}^{r} (\mathrm{X} - \alpha_k)^{\ell_k},$$

où λ est le coefficients dominants, les α_k sont les racines distinctes et les ℓ_k sont les ordres de multiplicités respectifs des racines α_k. En outre, on numérote les α_k de sorte que :

$$\alpha_1 < \cdots < \alpha_r.$$

Comme dans la question précédente, pour tout $k \in [\![1, r-1]\!]$, il existe $\beta_k \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ tel que $\mathrm{P}'(\beta_k) = 0$. Par ailleurs, α_k étant racine de P d'ordre ℓ_k, c'est une racine de P′ d'ordre $\ell_k - 1$ (quitte à ce que $\ell_k - 1 = 0$ auquel cas ce n'est pas une racine de P′).

En résumé, on a tout d'abord :

$$\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \cdots < \beta_{r-1} < \alpha_r,$$

donc tous les α_k et β_k sont distincts. De plus, les racines héritées des racines (éventuellement) multiples de P sont au nombre de :

$$\sum_{k=1}^{r} (\ell_k - 1) = \sum_{k=1}^{r} \ell_k - r = d - r.$$

Enfin, les racines « intermédiaires » obtenues à l'aide du théorème de Rolle sont au nombre de $r-1$, ce qui fait au total $d-1$ racines comptées avec multiplicité sachant que P′ est de degré $d-1$ donc P′ est bien scindé.

Exercice C-38

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et ℓ un réel tels que :

$$f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \ell \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell.$$

Montrer que f' s'annule sur $\mathbb{R}$.

Si f est constante alors le résultat est clair et sinon il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq \ell$, par exemple $f(a) > \ell$. À l'aide de la définition des limites, on trouve deux réels A et B, avec $\mathrm{A} < a < \mathrm{B}$, tels que $f(\mathrm{A}) < \frac{\ell + f(a)}{2}$ et $f(\mathrm{B}) < \frac{\ell + f(a)}{2}$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on obtient ensuite $\mathrm{A}' \in]\mathrm{A}, a[$ et $\mathrm{B}' \in]a, \mathrm{B}[$ tels que $f(\mathrm{A}') = f(\mathrm{B}') = \frac{\ell + f(a)}{2}$. Enfin, le théorème de Rolle appliqué à l'intervalle $[\mathrm{A}', \mathrm{B}']$ donne $c \in]\mathrm{A}', \mathrm{B}'[$ tel que $f'(c) = 0$.

Une autre démarche consiste à considérer une fonction auxiliaire, par exemple :

$$g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} f\big(\tan(x)\big) & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \ell & \text{sinon} \end{cases}.$$

Par composition de fonctions dérivables, g est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. L'hypothèse sur les limites montre que g est également continue aux bornes donc continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Enfin, on a $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{2}\right)$. D'après le théorème de Rolle, il existe donc $c \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $g'(c) = 0$ c'est-à-dire :

$$\big(1 + \tan^2(c)\big) f'\big(\tan(c)\big) = 0,$$

ce qui montre bien que f' s'annule.

Exercice C-39

1. Déterminer les dérivées successives de la fonction ln.
2. Soit P un polynôme de degré n et f la fonction donnée sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \mathrm{P}(x) - \ln(x).$$

Montrer que f s'annule au plus $n+1$ fois.

3. On considère les polynômes suivants (appelés *polynômes de Lagrange*) pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$:

$$\mathrm{L}_k(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n+1} \frac{x-i}{k-i}.$$

À l'aide de ces polynômes, trouver un exemple de polynôme P de degré n tel que la fonction f correspondante s'annule exactement $n+1$ fois.

1. La fonction ln est infiniment dérivable, calculons ses premières dérivées en $x > 0$:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x},$$

$$\ln''(x) = -\frac{1}{x^2},$$

$$\ln'''(x) = \frac{2}{x^3},$$

$$\ln^{(4)}(x) = -\frac{3!}{x^4}.$$

Cela permet d'avoir l'intuition d'une formule générale et on montre alors aisément par récurrence sur l'entier $n \geqslant 0$ que pour tout $x > 0$ on a :

$$\ln^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}.$$

2. Notons tout d'abord que la fonction f est infiniment dérivable.

Supposons que f s'annule k fois alors en utilisant le théorème de Rolle et en procédant comme dans l'exemple de **[SF15.5]**, on déduit que f' s'annule $k-1$ fois, puis en procédant toujours de même que f'' s'annule $k-2$ fois, etc. On aboutit ainsi au fait que $f^{(k-1)}$ s'annule (au moins) une fois. Par ailleurs, on remarque que, pour tout $x > 0$:

$$f^{(n+1)}(x) = 0 + (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \neq 0.$$

On en déduit que $k-1 < n+1$ puis $k \leqslant n+1$. Ainsi, f s'annule au plus $n+1$ fois.

Montrons maintenant que le nombre maximal de points en lesquels f s'annule est bien exactement $n+1$. Pour ce faire, montrons que l'on peut trouver un polynôme P de degré n tel que la fonction f correspondante s'annule exactement $n+1$ fois. Cela revient à trouver un polynôme de degré n qui coïncide avec la fonction ln en $n+1$ points. On commence par considérer les polynômes suivants (appelés *polynômes de Lagrange*) pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$:

$$\mathrm{L}_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n+1} \frac{\mathrm{X}-i}{k-i}.$$

Ce sont des polynômes de degré n tels que pour $j \in [\![1, n+1]\!]$, on ait :

$$\mathrm{L}_k(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}.$$

On pose alors :

$$\mathrm{P} = \sum_{k=1}^{n+1} \ln(k)\mathrm{L}_k,$$

de sorte que P soit un polynôme de degré au plus n (le degré n'est *priori* pas nécessairement n puisque les termes dominants peuvent se simplifier) tel que pour tout $j \in [\![1, n+1]\!]$:

$$\mathrm{P}(j) = \sum_{k=1}^{n+1} \ln(k)\mathrm{L}_k(j) = \ln(j).$$

La fonction f correspondante s'annule donc en $1, 2, \ldots, n+1$.

Enfin, si P était de degré $d < n$ alors, d'après la première partie de la question, la fonction f s'annulerait en au plus $d+1$ points mais $d+1 < n+1$ d'où une contradiction.

On a donc trouvé un polynôme P de degré n tel que la fonction f correspondante s'annule exactement $n+1$ fois.

Exercice C-40

Déterminer la limite de $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\tan^2(x)}$ quand x tend vers 0.

Tout d'abord, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\tan^2(x) - x^2}{x^2 \tan^2(x)} \\ &= \frac{\Big(\tan(x) + x\Big)\Big(\tan(x) - x\Big)}{x^2 \tan^2(x)}. \end{aligned}$$

En utilisant l'exercice précédent, on a :

$$\tan(x) \underset{0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

d'où :

$$\tan(x) + x \underset{0}{\sim} 2x,$$

et :

$$\tan(x) - x \underset{0}{\sim} \frac{1}{3}x^3,$$

ce qui conduit à :

$$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{\frac{2}{3}x^4}{x^4},$$

puis :

$$f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{2}{3}.$$

Exercice C-41

1. Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}}{1-x}$.
   Déterminer une équation de la tangente au graphe de f au point de coordonnées $(0, f(0))$ puis la position de la courbe par rapport à sa tangente.
2. Même question avec la fonction g définie pour $x < 1$ par $g(x) = \ln(1-x) - \cos(x)$.

1. On a :
$$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2),$$
et :
$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + o(x^2),$$
d'où en effectuant le produit :
$$\frac{\sqrt{1+x}}{1-x} \underset{0}{=} 1 + \frac{3}{2}x + \frac{11}{8}x^2 + o(x^2).$$
On en déduit que la tangente au graphe de f au point de coordonnées $(0, f(0))$ a pour équation :
$$y = 1 + \frac{3}{2}x.$$
De plus, on a :
$$f(x) - \left(1 + \frac{3}{2}x\right) \underset{0}{\sim} \frac{11}{8}x^2$$
donc cette différence est positive au voisinage de 0 ce qui signifie que, au voisinage du point considéré, le graphe de f est au-dessus de sa tangente.
2. On a :
$$\ln(1-x) \underset{0}{=} -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$
et :
$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 + -\frac{1}{2}x^2 + o(x^3),$$
d'où :
$$g(x) \underset{0}{=} -1 - x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$
On en déduit que la tangente au graphe de g au point de coordonnées $(0, g(0))$ a pour équation :
$$y = -1 - x.$$
De plus, on a :
$$g(x) - (-1 - x) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{3}x^3$$
donc cette différence est du signe opposé à celui de x au voisinage de 0 ce qui signifie que, au voisinage du point considéré, le graphe de f est au-dessus de sa tangente pour $x < 0$ et au-dessous de sa tangente pour $x > 0$.

Exercice C-42

1. Étudier la limite de la suite u donnée par : $u_n = (n+1)e^{\frac{1}{n}} - n$.
2. Étudier la limite de la suite v donnée par : $v_n = n\Big(\ln(2n+1) - \ln(n) - \ln(2)\Big) - \frac{1}{2}$.

1. Tout d'abord, on a :

$$e^u \underset{0}{=} 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + o(u^2),$$

d'où :

$$e^{\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

puis :

$$(n+1)e^{\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{=} \left(n + 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{n}\right) + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + o\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

d'où :

$$u_n \underset{+\infty}{=} 2 + \frac{3}{2}\frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

et par conséquent :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2.$$

2. Tout d'abord, on a :

$$\begin{aligned} v_n &= n\ln\Big(\frac{2n+1}{2n} - \frac{1}{2}\Big) \\ &= n\ln\Big(1 + \frac{1}{2n}\Big) - \frac{1}{2}n. \end{aligned}$$

On a :

$$\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2),$$

d'où :

$$\ln\Big(1 + \frac{1}{2n}\Big) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{2n} - \frac{1}{2}\frac{1}{4n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

puis :

$$v_n \underset{+\infty}{=} -\frac{1}{8n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

donc :

$$v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$