CHAPITRE

II

SUITES ET FONCTIONS - RÉVISIONS

Sommaire

A - Rappels sur les suites

Il n'est pas question de reprendre toutes les notions vues en première année mais on s'atarde sur quelques éléments essentiels. Les énoncés seront formulés (le plus souvent) pour des suites définies pour $n \geqslant 0$, le cas général ($n \geqslant n_0$) s'adapte aisément.

On renvoie au cours de première année pour les opérations sur les limites ainsi que pour les types particuliers de suites (arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques et définies par une relation de récurrence linéaire d'ordre 2).

Convergence ou divergence d'une suite

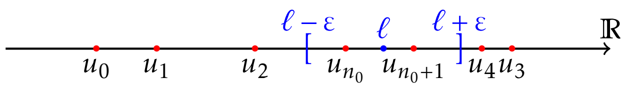
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et ℓ un réel.

On dit que la suite u ***admet*** ℓ ***pour limite*** ou encore qu'elle ***converge vers*** ℓ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Autrement dit, tout intervalle centré sur ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.



Si une limite existe alors elle est unique ; on peut donc parler de *la* limite de u et on peut écrire : $\ell = \lim u$ ou $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

On dit qu'une suite u est ***convergente*** lorsqu'elle admet une limite finie, sinon on dit qu'elle est ***divergente***.

Cas d'une limite infinie

1 ▹ On dit que u a pour limite $+\infty$ ou encore que u tend vers $+\infty$ lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant A.$$

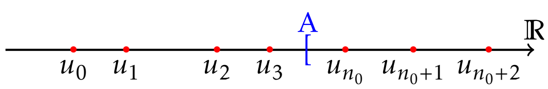
On écrit alors $\lim u = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

2 ▹ On dit que u a pour limite $-\infty$ ou encore que u tend vers $-\infty$ lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant A.$$

On écrit alors $\lim u = -\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

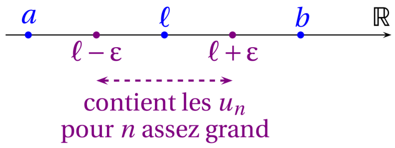
3 ▹ Cela signifie (pour le cas de $+\infty$) que les termes de la suite sont aussi grands que l'on veut pour n assez grand :



Propriétés des suites convergentes

1 ▹ Une suite convergente est bornée.

Si u converge vers un réel ℓ et si a et b sont des réels tels que $a < \ell < b$ alors on a $a < u_n < b$ à partir d'un certain rang.



2 ▹ Si u est une suite qui converge vers $\ell \neq 0$ alors, à partir d'un certain rang, u_n est non nul et reste de signe constant.

En particulier, si $\ell > 0$ alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang. De même, si $\ell < 0$ alors $u_n < 0$ à partir d'un certain rang.

3 ▹ Une suite qui diverge vers $+\infty$ est minorée. Une suite qui diverge vers $-\infty$ est majorée.

4 ▹ Soit u et v deux suites convergentes de limite respective ℓ et ℓ'.

Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang alors $\ell \leqslant \ell'$.

On en déduit que si u converge vers ℓ et est majorée par M, à partir d'un certain rang, alors $\ell \leqslant \mathrm{M}$.

De même, si u converge vers ℓ et est minorée par m, à partir d'un certain rang, alors $\ell \geqslant m$.

Le théorème d'existence de limite par encadrement (ou des gendarmes)

Soit u, v et w trois suites réelles telles que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang.

Si u et w convergent vers un même réel ℓ alors v converge et sa limite vaut ℓ.

Sur le même modèle, on dispose également des variantes suivantes dans le cas d'une limite infinie :

- Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et si u diverge vers $+\infty$ alors v diverge également vers $+\infty$.
- Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et si v diverge vers $-\infty$ alors u diverge également vers $-\infty$.

Termes d'indices pairs, termes d'indices impairs

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- La *sous-suite des termes d'indices pairs* de u, notée $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, est la suite v donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{2n}.$$

- La *sous-suite des termes d'indices impairs* de u, notée $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, est la suite v donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_{2n+1}.$$

Alors on a (où ℓ est réel ou infini) :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \iff \begin{cases} u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \\ u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \end{cases}.$$

Théorème de la limite monotone

Soit u une suite croissante :

- si u est majorée alors u converge ;
- sinon, u diverge vers $+\infty$.

Soit u une suite décroissante :

- si u est minorée alors u converge ;
- sinon, u diverge vers $-\infty$.

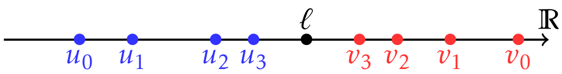
Une suite monotone admet donc toujours une limite, finie ou infinie.

Suites adjacentes

Deux suites réelles u et v sont dites ***adjacentes*** lorsque u est croissante, v est décroissante (ou le contraire) et $u - v$ tend vers 0.

Dans ces conditions, on a :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$;
- u et v convergent vers une limite commune ℓ ;
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.



On a donc en particulier pour tout entier n :

$$|u_n - \ell| \leqslant |u_n - v_n|.$$

Cela représente un intérêt algorithmique puisqu'il suffit que $|u_n - v_n| \leqslant \varepsilon$ pour que u_n fournisse une valeur approchée de ℓ à une précision d'au plus ε.

Comparaison de suites

Certaines limites, traditionnellement regroupées sous l'appellation **croissances comparées** sont particulièrement utiles car elle permettent de comparer les suites factorielle, puissances et géométriques.

Si $\alpha > 0$ et $q > 1$ alors :

$$\frac{n^\alpha}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad , \quad \frac{q^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{n^\alpha}{q^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Pour tout $a > 0$, on a $\mathrm{e}^a > 1$ donc on en déduit :

$$\frac{n^\alpha}{\mathrm{e}^{an}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On peut ajouter (avec $\beta > 0$) :

$$\frac{\big(\ln(n)\big)^\beta}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Suites équivalentes

On dit que deux suites réelles u et v sont ***équivalentes***, et on note $u_n \sim v_n$, lorsqu'il existe une suite w telle que l'on ait :

$$u_n = v_n w_n \text{ à partir d'un certain rang et } w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang alors cela revient à dire que :

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Deux suites équivalentes sont de même signe à partir d'un certain rang.

En particulier, si l'une ne s'annule pas à partir d'un certain rang alors l'autre non plus.

Équivalents usuels

Si u est une suite tendant vers 0 alors :

$$\mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim u_n \ , \ \ln(1+u_n) \sim u_n \ , \ (1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n \ ,$$

$$1-\cos(u_n) \sim \frac{{u_n}^2}{2} \ , \ \sin(u_n) \sim u_n \ \text{ et } \ \tan(u_n) \sim u_n.$$

Si P est une fonction polynomiale alors $\mathrm{P}(n)$ est équivalent à son terme de plus haut degré, c'est-à-dire que pour $\lambda \neq 0$, on a :

$$\lambda n^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_k n^k \sim \lambda n^p.$$

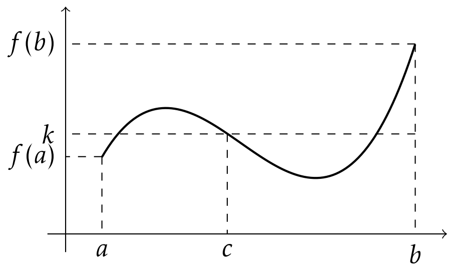
B - Rappels sur la continuité et la dérivabilité

Là encore, il n'est pas question de reprendre toutes les définition et toutes les notions (et notamment celles liées à l'aspect calculatoire). On se focalise ici sur quelques points essentiels avec notamment les théorèmes généraux avec une hypothèse globale.

Théorème des valeurs intermédiaires

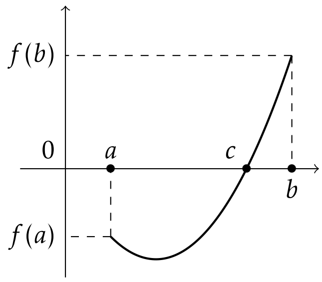
On considère une fonction f continue sur un intervalle I ainsi que deux réels a et b de I.

Alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c entre a et b tel que $k = f(c)$.



On peut également énoncer le résultat sous la forme suivante : si f est continue sur I avec $f(a)$ et $f(b)$ de signes opposés alors f s'annule entre a et b.

Autrement dit une fonction continue qui change de signe s'annule nécessairement.



Ce théorème permet d'affirmer que si f est continue alors l'équation $f(x) = k$ a toujours une solution dès que k est entre $f(a)$ et $f(b)$.

Une conséquence du théorème (en fait c'est équivalent) est que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème des bornes atteintes (ou de Weierstrass)

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Cela revient à dire que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue alors il existe des réels x_0 et x_1 dans $[a,b]$ tels que :

$$\forall x \in [a,b],\ f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant f(x_1).$$

Autrement dit, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment. Plus précisément, on a $f([a,b]) = [m, \mathrm{M}]$ avec m et M le minimum et le maximum, respectivement, de f sur $[a,b]$. Cependant, on n'a pas nécessairement $m = f(a)$ et $\mathrm{M} = f(b)$, cela dépend des variations de la fonction.

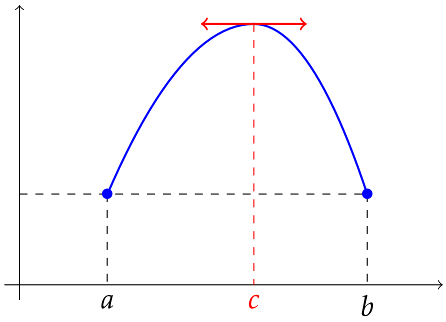
En ce qui concerne la dérivabilité, deux résultats aux hypothèses semblables permettent des considérations globales sur les fonctions dérivables.

Théorème de Rolle

On considère deux réels a et b avec $a < b$ et une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = 0.$$

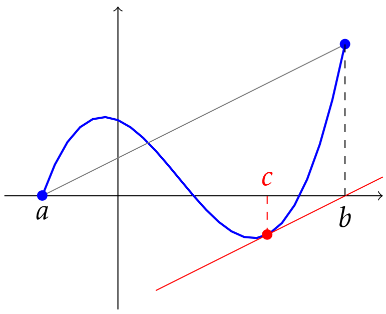


Théorème des accroissements finis

On considère deux réels a et b avec $a < b$ et une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$



Remarques

1 ▹ On peut reformuler la conclusion du théorème des accroissements finis en posant $b = a + h$ avec $h > 0$ ce qui donne :

$$\exists \theta \in]0, 1[\ / \ f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h).$$

2 ▹ Du théorème des accroissements finis, on déduit l'inégalité des accroissements finis.

Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que f' soit bornée sur $]a, b[$ alors :

$$(b - a) \inf_{a<x<b} f'(x) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant (b - a) \sup_{a<x<b} f'(x).$$

En particulier, s'il existe $k \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in [a, b], \ \left|f'(x)\right| \leqslant k,$$

(c'est par exemple le cas lorsque f est de classe $\mathscr{C}^1$), alors :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \ \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant k\left|x - y\right|.$$

3 ▹ Le théorème des accroissements finis permet d'établir le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variations de la fonction.

Soit I un intervalle ouvert et f une fonction dérivable sur I, alors :

– f est croissante sur I $\iff \forall x \in \mathrm{I}, \ f'(x) \geqslant 0$;

– f est décroissante sur I $\iff \forall x \in \mathrm{I}, \ f'(x) \leqslant 0$;

- f est constante sur I $\iff \forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) = 0$.

De plus, si $f' > 0$ sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points en lesquels f' s'annule, alors f est strictement croissante sur I.

Plus généralement, si f est continue sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ (avec a et b éventuellement infinis) et si $f' > 0$ sur $]a, b[$ sauf éventuellement en un nombre fini de points en lesquels f' s'annule, alors f est strictement croissante sur $[a, b]$.

On a des résultats analogues dans le cas décroissant.

Le théorème de la bijection

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue strictement monotone sur I alors :

- f réalise une bijection de I sur $f(\mathrm{I})$;
- la bijection réciproque f^{-1} est continue sur $f(\mathrm{I})$ et a le même sens de variation que f ;
- si de plus f est dérivable en $a \in \mathrm{I}$, avec $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et :

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(b)\big)}.$$

C - Problématiques et savoir-faire fondamentaux

C.1 - Les outils de l'analyse

C.1.a - Comment obtenir des inégalités ?

SF29 **Manipuler algébriquement des inégalités**

La méthode la plus naturelle pour obtenir des inégalités consiste à exploiter les encadrements donnés sur les différents réels manipulés puis à exploiter les règles algébriques (additionner des inégalités, multiplier des inégalités entre réels positifs, « passer à l'inverse », positivité du carré d'un réel...).

Exemple

Montrer que pour tous réels positifs ou nuls a et b, on a : $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqslant \sqrt{2(a+b)}$.

Soit a et b deux réels positifs ou nuls.

Tout d'abord, on remarque que :

$$0 \leqslant (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = a+b-2\sqrt{a}\sqrt{b},$$

d'où :

$$0 \leqslant (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+b+2\sqrt{a}\sqrt{b} \leqslant 2(a+b),$$

et la croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ induit :

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqslant \sqrt{2(a+b)}.$$

SF30 **Étudier une fonction**

Une autre façon d'obtenir des inégalités est de considérer une fonction auxiliaire dont on étudie les variations (par exemple en exploitant sa dérivée) afin d'en déterminer le signe, ou à laquelle on applique le théorème des accroissements finis.

Exemple

Montrer que pour tout réel positif ou nul x, on a : $\ln(1+x) \geqslant x - \frac{1}{2}x^2$.

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)$.

La fonction f est obtenue par composition et somme de la fonction ln avec des fonctions polynomiales donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = \frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{1-(1-x^2)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}.$$

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$; or $f(0) = 0$, donc f est positive sur $\mathbb{R}_+$ ce qui induit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ln(1+x) \geqslant x - \frac{1}{2}x^2.$$

Notons que si l'on a $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage d'un point a et si l'on sait que f et g admettent une limite en a alors :

$$\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x);$$

de même si l'on a $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et si l'on sait que ces deux suites convergent alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Il faut bien prendre garde au fait que ce « passage à la limite » ne prouve pas l'existence de la limite mais procure seulement une inégalité (large) sur des limites dont on connaît l'existence.

SF31 Exploiter la croissance de l'intégrale

Bien que nous n'ayons pas encore revu les questions de sommation, on peut mentionner ici cette idée.

Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ telles que $f \leqslant g$ sur $[a,b]$, alors peut « intégrer l'inégalité » et obtenir l'inégalité :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Lors de l'application de ce résultat, il faut prendre garde à avoir les bornes d'intégration « dans le bon sens », c'est-à-dire $a \leqslant b$.

Exemple

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Soit $n \geqslant 1$. Pour tout $t \in [n, n+1]$, on a :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Par croissance de l'intégrale sur l'intervalle $[n, n+1]$, on a :

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\mathrm{d}t,$$

soit :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \Big[\ln(t)\Big]_n^{n+1} \leqslant \frac{1}{n},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Et les propriétés algébriques du logarithme permettent de rassembler les deux termes centraux pour obtenir l'inégalité recherchée.

On peut retrouver ce résultat en appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction ln sur l'intervalle $[n, n+1]$.

SF32 Utiliser la convexité

Exemple

Montrons que, pour tous réels $a > 1$ et $b > 1$, on a :

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(a)\ln(b)}.$$

Considérons la fonction $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$ sur $]1,+\infty[$.

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, et on a $\ln(x) > 0$ pour tout $x > 1$. On en déduit par composition que la fonction $x \mapsto \ln(\ln(x))$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ donc en particulier de classe $\mathscr{C}^2$.

Notons f cette fonction. Pour tout $x > 1$, on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} \quad i.e. \quad f'(x) = \frac{1}{x\ln(x)},$$

puis :

$$f''(x) = -\frac{\ln(x) + x\frac{1}{x}}{\left(x\ln(x)\right)^2} \quad i.e. \quad f''(x) = -\frac{\ln(x)+1}{\left(x\ln(x)\right)^2}.$$

Pour tout $x > 1$, on a $\ln(x) > 0$ d'où :

$$\forall x > 1,\ f''(x) < 0$$

donc la fonction $x \mapsto \ln\left(\ln(x)\right)$ est concave sur $]1,+\infty[$.

Considérons deux réels a et b dans $]1,+\infty[$. Puisque $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, on a par concavité de la fonction précédente :

$$\ln\left(\ln\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right)\right) \geqslant \frac{1}{2}\ln\left(\ln(a)\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\ln(b)\right),$$

soit :

$$\ln\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geqslant \frac{1}{2}\ln\left(\ln(a)\ \ln(b)\right),$$

d'où par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln(\ln(a)\ \ln(b))},$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(a)\ln(b)}.}$$

C.1.b - Comment étudier localement une fonction ou une suite ?

SF33 Calculer une limite

Le principe est d'aller du plus simple au plus compliqué !

- En premier lieu, on regarde si les règles algébriques sur les limites ne donnent pas directement le résultat. Autrement dit, l'expression présente-t-elle une forme indéterminée ou non ?
- S'il y a une forme indéterminée, on peut essayer de reconnaître une forme simple usuelle comme un taux d'accroissement, de modifier rapidement l'écriture (avec une quantité conjuguée par exemple), d'invoquer un résultat de croissances comparées.
- Si la forme indéterminée est plus compliquée, alors on peut chercher dans un premier temps à calculer un équivalent à l'aide de résultats usuels ou, si le calcul de l'équivalent n'est pas possible directement (typiquement le cas d'une somme), on peut finalement utiliser un développement limité.

Exemple

Déterminer la limite en 0^+ de $f(x) = \dfrac{\sin\big(x\ln(x)\big)}{x}$.

Par croissances comparées, on a : $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.

On a donc une forme indéterminée « du type $\frac{0}{0}$ » ; cependant on sait que : $\sin(u) \underset{0}{\sim} u$.

On en déduit par composition à droite (ou substitution) :

$$\sin\big(x\ln(x)\big) \underset{0^+}{\sim} \big(x\ln(x)\big).$$

Il s'ensuit : $f(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{x\ln(x)}{x} = \ln(x)$. Par conséquent : $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$.

SF34 Exploiter des inégalités

Encadrer (ou majorer en valeur absolue) permet d'obtenir l'existence et la valeur d'une limite par le théorème d'encadrement.

De même, minorer par une quantité tendant vers $+\infty$ et majorer par une quantité tendant vers $-\infty$ permettent d'obtenir l'existence et la valeur, infinie, de la limite par le théorème de comparaison.

Exemple

Déterminer la limite en $+\infty$ de $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0,n]\!]$, on a : $0 < n^2 \leqslant (n+k)^2 \leqslant (2n)^2$.

En passant à l'inverse puis en sommant pour $k \in [\![0,n]\!]$, il vient :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2n)^2} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2},$$

soit :

$$\frac{n+1}{4n^2} \leqslant u_n \leqslant \frac{n+1}{n^2}.$$

Les deux termes encadrant convergent vers 0 donc, par encadrement, la suite u converge également vers 0.

Un autre type d'exploitation d'inégalités vient de l'inégalité des accroissements finis dans le cadre de l'étude de suites définies par une relation de récurrence du type : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exemple

Soit u la suite donnée par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \cos(u_n)$. Montrer que cos admet un unique point fixe α entre 0 et 1 puis que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - \alpha| \leqslant \big(\sin(1)\big)^n.$$

Conclure alors à la convergence de la suite.

La fonction $x \mapsto \cos(x) - x$ est dérivable sur l'intervalle $[0,1]$ et sa dérivée $x \mapsto -\sin(x) - 1$ est strictement négative donc cette fonction est strictement décroissante sur $[0,1]$, et continue.

On en déduit que cette fonction réalise une bijection décroissante entre $[0,1]$ et son image $[\cos(1) - 1, 1]$.

Comme 0 appartient à ce dernier intervalle, on en déduit que l'équation $\cos(x) = x$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0,1]$.

De plus, le fait que $\cos([0,1]) \subset [0,1]$ assure, par une récurrence immédiate, que la suite u est à valeurs dans l'intervalle $[0,1]$.

La fonction cos est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ donc, d'après le théorème des accroissements finis, pour tous x et y dans $[0,1]$, il existe c_x entre x et y tel que :

$$\cos(x) - \cos(y) = -\sin(c_x)(x-y),$$

ce qui conduit, compte tenu de la croissance de sin sur $[0,1]$, à :

$$\left|\cos(x) - \cos(y)\right| \leqslant \sin(1)\left|x-y\right|.$$

En particulier, on en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \sin(1)|u_n - \alpha|.$$

Un raisonnement par récurrence immédiat donne alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\sin(1)\right)^n |u_0 - \alpha| \leqslant \left(\sin(1)\right)^n.$$

Comme $0 < \sin(1) < 1$, le majorant est le terme d'une suite géométrique de limite nulle donc, par encadrement, on en déduit :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha.$$

SF35 Interpréter des relations locales

On l'a déjà évoqué, un équivalent permet d'obtenir une limite. L'interprétation peut également porter sur une comparaison, au voisinage d'un réel x_0, entre deux fonctions f et g qui permet d'en déduire les positions relatives des représentations graphiques. En particulier, les développements limités permettent ainsi d'obtenir les équations des tangentes ou d'éventuelles asymptotes ainsi que la position de la représentation graphique de la fonction par rapport à ces droites.

Exemple

Déterminer l'asymptote éventuelle en $+\infty$ ainsi que la position du graphe par rapport à cette droite pour la fonction f donnée sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{x}{x-1}\sqrt{x^2+1}$.

Tout d'abord pour tout $x > 0$, on peut écrire :

$$f(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{x}}x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}.$$

Puisque $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, on exploite des développements limités usuels en 0 :

$$\frac{1}{1-u} \underset{0}{=} 1 + u + u^2 + o(u^2),$$

et :

$$\sqrt{1+u} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}u + o(u),$$

d'où :

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x}} \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

et :

$$\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \underset{+\infty}{=} 1+\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Le produit donne :

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \underset{+\infty}{=} 1+\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

puis :

$$f(x) \underset{+\infty}{=} x+1+\frac{3}{2}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

On en déduit :

$$f(x)-(x+1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{2}\frac{1}{x}.$$

En particulier, cet équivalent tend vers 0 et est positif au voisinage de $+\infty$ donc la représentation graphique de f admet une asymptote Δ d'équation :

$$y = x+1,$$

et on a :

$$f(x) \geqslant x+1 \text{ au voisinage de } +\infty,$$

ce qui signifie, que pour x assez grand, la représentation graphique de f est située au-dessus de la droite Δ.

C.1.c - Comment exploiter les propriétés globales d'une fonction ou d'une suite ?

SF36 Utiliser la monotonie

L'un des résultats essentiels donnant l'existence d'une limite (sans toutefois en donner la valeur) est le théorème de la limite monotone : une suite ou une fonction monotone admettent toujours une limite, finie ou infinie ; c'est le caractère majorée ou minorée qui permet alors de conclure quant à l'existence ou non d'une limite finie.

Notons qu'une erreur courante dans l'application de ce théorème consiste à affirmer à tort que la limite va être égale à la majoration M ou à la minoration m considérée (qui n'a pourtant aucune raison d'être « optimale »). Cependant, on obtient une inégalité entre la limite et le majorant ou minorant considéré.

Exemple

Considérons une fonction f, croissante sur un segment $[a,b]$ et telle que l'image directe $f([a,b])$ soit incluse dans l'intervalle $[a,b]$, et une suite u donnée par $u_0 \in [a,b]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Montrons que la suite u converge.

Tout d'abord, la relation $f([a,b]) \subset [a,b]$ assure (par une récurrence immédiate) que la suite u est bien définie et est à valeurs dans le segment $[a,b]$.

D'autre part, si $u_0 \leqslant u_1$ alors la croissance de f donne :

$$u_1 = f(u_0) \leqslant f(u_1) = u_2,$$

puis :

$$u_2 = f(u_1) \leqslant f(u_2) = u_3, \ldots$$

Par une récurrence, là encore, immédiate, il vient $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout entier naturel n.

En revanche, si $u_0 \geqslant u_1$ alors le même raisonnement conduit à $u_n \geqslant u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Finalement, la croissance de f induit la monotonie de la suite u. Or cette suite est bornée (puisqu'à valeurs dans $[a,b]$) donc, d'après le théorème de la limite monotone, u est convergente.

Une autre situation classique d'utilisation de la monotonie est celle des suites adjacentes. L'intérêt de cette situation est autant de fournir un moyen de prouver la convergence de deux suites que de fournir un encadrement de la limite.

Exemple

Montrons la convergence de la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ donnée par $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, en considérant les sous-suites $(\mathrm{S}_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(\mathrm{S}_{2n+1})_{n\geqslant 0}$, puis montrons que la limite est dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right]$.

Tout d'abord on a :

$$\mathrm{S}_{2(n+1)} - \mathrm{S}_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} > 0,$$

et :

$$\mathrm{S}_{2(n+1)+1} - \mathrm{S}_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} < 0,$$

ce qui signifie que $(\mathrm{S}_{2n})_{n\geqslant 1}$ est croissante et $(\mathrm{S}_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_{2n+1} - \mathrm{S}_{2n} &= \frac{1}{2n+1}\\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Les suites $(\mathrm{S}_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(\mathrm{S}_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ sont donc adjacentes.

On en déduit que $(\mathrm{S}_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(\mathrm{S}_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ convergent toutes deux vers une même limite ℓ. Ce qui permet de conclure que la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ converge également vers ℓ.

Comme les deux suites considérées sont adjacentes, on a pour tout $n \geqslant 1$:

$$\mathrm{S}_{2n} \leqslant \ell \leqslant \mathrm{S}_{2n+1},$$

soit :

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \leqslant \ell \leqslant \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

En particulier, pour $n = 1$, il vient :

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

SF37 Montrer la bijectivité d'une fonction

La manière la plus intuitive d'obtenir la bijectivité d'une application f consiste à résoudre l'équation $f(x) = y$, pour tout y dans l'ensemble d'arrivée.

En considérant l'application qui à y associe l'unique solution de l'équation (d'inconnue x) $f(x) = y$, on obtient également l'application réciproque f^{-1}.

Exemple

Étudier la bijectivité et expliciter l'application réciproque de l'application f donnée pour tout réel x par :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Tout d'abord, on a pour tout réel x :

$$\left|\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right| = \frac{|e^x - e^{-x}|}{e^x + e^{-x}} < 1,$$

donc f est à valeurs dans $]-1,1[$.

Considérons donc $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1,1[$, alors :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ &\iff y\left(e^x + e^{-x}\right) = e^x - e^{-x} \\ &\iff y\left(e^{2x} + 1\right) = e^{2x} - 1 \\ &\iff (y-1)e^{2x} = -1 - y. \end{aligned}$$

Comme $-1 < y < 1$, on a $1 - y > 0$ et $1 + y > 0$ d'où :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \\ &\iff 2x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \\ &\iff x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right). \end{aligned}$$

L'équivalence précédente montre que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$ et que, pour tout $y \in]-1,1[$, on a :

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

Il arrive, dans des problèmes de concours, que l'application réciproque g de $f : E \to F$ puisse être devinée et qu'il suffise donc de vérifier que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

En général, la méthode la plus pratique pour obtenir la bijectivité (mais qui ne fournit pas la réciproque) consiste à utiliser le théorème de la bijection.

Exemple

Étudier la bijectivité de l'application f donnée pour tout réel x par :

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

La fonction f est deux fois dérivable, comme combinaison linéaire de fonctions usuelles deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, et on a pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = f(x) > 0.$$

La fonction f' est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ or $f'(0) = 0$ donc $f'(x) < 0$ pour $x < 0$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$ (ne serait-ce que du fait de sa parité).

Cependant, la restriction de f à l'intervalle $[0,+\infty[$ est continue et strictement croissante donc f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ vers $[1,+\infty[$.

SF38 Obtenir l'existence d'une solution d'équation

Deux grands théorèmes permettent d'obtenir l'existence d'une solution d'équation : le théorème des valeurs intermédiaires (ou le théorème de la bijection qui donne en outre l'unicité de la solution) et le théorème des accroissements finis (ou le théorème de Rolle dans un cas particulier).

Avant de chercher à appliquer l'un de ces deux résultats, il faut donc bien identifier leur différence : le théorème des valeurs intermédiaires se concentre sur la fonction f avec seulement la continuité comme hypothèse, alors que le théorème des accroissements finis fournit un résultat sur la dérivée de la fonction. La forme de l'équation permet donc souvent de préférer un théorème à l'autre.

Exemple

Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel strictement positif x_p tel que :

$$1 + \ln(x_p + p) = x_p.$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f donnée sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \ln(x + p) - x.$$

Il s'agit de montrer que f s'annule exactement une fois sur $]0,+\infty[$.

Cette fonction est dérivable sur $[0,+\infty[$ et :

$$f'(x) = \frac{1}{x+p} - 1 = \frac{1-x-p}{x+p}.$$

On a $f'(x) < 0$ pour $x > 0$. De plus par croissances comparées, on a :

$$f(x) = 1 + x\left(\frac{\ln(x+p)}{x+p}\frac{x+p}{x} - 1\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty,$$

d'où le tableau de variations :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$1+\ln(p)$	$\searrow$	$-\infty$

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ donc f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ vers $]-\infty, 1+\ln(p)]$.

Enfin, on a $0 \in]-\infty, 1+\ln(p)[$ donc l'équation $f(x)=0$ admet bien une unique solution dans l'intervalle $]0,+\infty[$.

Exemple

Considérons une fonction f définie sur l'intervalle $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifiant $f(0)=f'(0)=f(1)=0$.

Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c)=\frac{f(c)}{c}$.

Puisque $f(0)=0$, la dérivabilité de f en 0 donne :

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} f'(0),$$

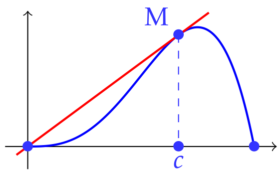
ce qui permet de définir une fonction g continue sur $[0,1]$ en posant :

$$g(x)=\frac{f(x)}{x} \text{ pour } 0<x\leqslant 1, \text{ et } g(0)=f'(0).$$

Cette fonction g est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ (comme quotient de fonctions dérivables) et vérifie $g(0)=g(1)=0$. Le théorème de Rolle affirme alors qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $g'(c)=0$. Ainsi, on a :

$$\frac{f'(c)c-f(c)}{c^2}=0, \text{ ce qui conduit à } f'(c)c-f(c)=0, \text{ soit } f'(c)=\frac{f(c)}{c}.$$

Notons que la relation $f'(c)=\frac{f(c)}{c}$ signifie que la tangente à la courbe, au point d'abscisse c, passe par l'origine.



C.2 - Suites et fonctions usuelles

C.2.a - Comment montrer des propriétés globales de suites ou de fonctions ?

Nous présentons quelques idées indépendantes de la notion de dérivée et de celle d'étude de fonction évoquées dans le thème suivant.

SF39 **Étudier la monotonie d'une suite ou d'une fonction**

Il y a essentiellement deux façons d'étudier la monotonie d'une suite u : soit on étudie le signe de $u_{n+1}-u_n$, soit on compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 (en prenant garde au signe de u_n).

Exemples

1 ▹ Étudier la monotonie de la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = 1 + \frac{1}{n}$.

Pour tout $n \geqslant 1$ on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)} \\ &< 0 \end{aligned}$$

donc $u_{n+1} < u_n$ et la suite u est strictement décroissante.

2 ▹ Étudier la monotonie de la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = \frac{n^n}{n!}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n > 0$ et on a :

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

et comme $\frac{n+1}{n} > 1$, on en déduit que $\frac{v_{n+1}}{v_n} > 1$. On multiplie par v_n (qui est positif), on obtient $v_{n+1} > v_n$ ce qui signifie que v est strictement croissante.

Dans le cas d'une fonction, outre l'utilisation de la dérivée, on peut directement vérifier la définition ou utiliser des opérations sur les fonctions.

SF40 Encadrer, minorer, majorer une suite ou une fonction

Techniquement le cas d'une suite et celui d'une fonction diffèrent peu. Les idées sont les mêmes : encadrer des parties que l'on somme ensuite, minorer un dénominateur pour majorer le quotient,etc. Il est pour cela indispensable de connaître parfaitement les fonctions usuelles et certaines inégalités les invoquant.

Exemple

Encadrer la suite u donnée pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\frac{n}{n^2+n} \leqslant \frac{n}{n^2+k} \leqslant \frac{n}{n^2+1},$$

d'où en sommant :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant \frac{n^2}{n^2+1},$$

et en simplifiant :

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}.$$

Il est souvent préférable, pour montrer qu'une expression est bornée, de la majorer en valeur absolue.

Exemple

Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-x} - \cos(x)}{x^2+1}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$, on a tout d'abord par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^{-x} - \cos(x)}{x^2+1}\right| &\leqslant \frac{|e^{-x} - \cos(x)|}{x^2+1} \\ &\leqslant \frac{|e^{-x}| + |\cos(x)|}{x^2+1}.\end{aligned}$$

Les fonctions $x \mapsto |e^{-x}| = e^{-x}$, $|\cos|$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ sont toutes majorées par 1 sur $\mathbb{R}_+$, donc :

$$\left|\frac{e^{-x} - \cos(x)}{x^2+1}\right| \leqslant 2.$$

C.2.b - Comment exploiter des propriétés globales d'une fonction ?

SF41 **Restreindre le domaine d'étude**

Les propriétés de périodicité, parité et imparité permettent de réduire le domaine d'étude d'une fonction. Lorsqu'une fonction f est périodique de période $T > 0$, il suffit de la connaître sur un intervalle de longueur T pour en déduire son comportement général. Lorsque f est paire ou impaire, il suffit de la connaître lorsque la variable est positive pour en déduire son comportement général.

Exemple

Déterminer le domaine d'étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(4x)$.

Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned}f(x + \tfrac{\pi}{2}) &= \sin(4x + 2\pi) \\ &= \sin(4x) \\ &= f(x),\end{aligned}$$

donc f est périodique de période $\frac{\pi}{2}$: il suffit d'étudier f sur n'importe quel intervalle du type $[\alpha, \alpha + \frac{\pi}{4}]$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}f(-x) &= \sin(-4x) \\ &= -\sin(4x) \\ &= -f(x),\end{aligned}$$

donc f est impaire. Finalement, il suffit d'étudier f sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ pour en déduire son comportement sur $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ par l'imparité puis sur $\mathbb{R}$ par la périodicité de période $\frac{\pi}{2}$.

SF42 **Exploiter la monotonie dans des inégalités**

La manipulation d'inégalités, en particulier dans des inéquations, amène souvent à devoir composer de part et d'autre par une application. Il est donc nécessaire de connaître le sens de variation des fonctions intervenant (ainsi que l'intervalle de validité de cette monotonie).

Exemple

Résoudre l'équation d'inconnue réelle x : $\ln(x+1) > \ln(2x-3)$.

Tout d'abord, on doit avoir $x+1>0$ et $2x-3>0$ pour que ces expressions soient bien définies, c'est-à-dire $x>\frac{3}{2}$. La stricte croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\ln(x+1) > \ln(2x-3) &\iff \mathrm{e}^{\ln(x+1)} > \mathrm{e}^{\ln(2x-3)}\\ &\iff x+1 > 2x-3\\ &\iff 4 > x.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $]\frac{3}{2}, 4[$.

SF43 Transformer sommes, produits, puissances

Parmi toutes les fonctions usuelles qu'il est indispensable de connaître et maîtriser, soulignons l'intérêt des fonctions exponentielle et logarithme népérien pour transformer, respectivement, une somme en produit et un produit en somme par les formules :

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^b \quad \text{et} \quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Il s'ensuit notamment que des conditions portant sur des puissances peuvent se transformer en conditions portant sur des sommes.

Exemple

Déterminons, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, le nombre d'entiers $p\in\mathbb{N}$ tels que :

$$50^n \leqslant 7^p \leqslant 50^{n+1}.$$

Transformons cette condition à l'aide de la fonction ln :

$$\begin{aligned}50^n \leqslant 7^p \leqslant 50^{n+1} &\iff n\ln(50) \leqslant p\ln(7) \leqslant (n+1)\ln(50)\\ &\iff n\frac{\ln(50)}{\ln(7)} \leqslant p \leqslant (n+1)\frac{\ln(50)}{\ln(7)}.\end{aligned}$$

Posons $\alpha = \frac{\ln(50)}{\ln(7)}$, alors :

$$50^n \leqslant 7^p \leqslant 50^{n+1} \iff n\alpha \leqslant p \leqslant n\alpha + \alpha.$$

Il s'agit donc de compter le nombre d'entiers p contenus dans l'intervalle $\left[n\alpha, n\alpha+\alpha\right]$. Comme $\alpha \approx 2{,}01$, ce nombre d'entiers est 2 ou 3.

C.2.c - Comment calculer les termes d'une suite ?

SF44 Reconnaître une suite arithmétique ou géométrique

Exemples

1 ▹ Exprimer, en fonction de n, la suite arithmétique u de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 2$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $u_n = 1 + 2n$.

2 ▹ Exprimer, en fonction de n, la suite géométrique v de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $q = -2$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $v_n = 2.(-2)^n = (-1)^n 2^{n+1}$.

SF45 Revenir à une suite géométrique dans le cas d'une suite arithmético-géométrique

On dit que u est une suite arithmético-géométrique lorsque l'on a une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = au_n + b$ avec a réel différent de 1 et b réel. En notant ℓ le réel tel que $a\ell + b = \ell$, la suite $(u_n - \ell)$ est alors géométrique.

Exemple

Donner l'expression, en fonction de n, de la suite u donnée par $u_0 = 2$ et la relation $u_{n+1} = -u_n + 2$.

Tout d'abord, on a $\ell = -\ell + 2$ si et seulement si $\ell = 1$. On écrit alors pour tout entier n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= -u_n + 2 - 1 \\ &= -(u_n - 1). \end{aligned}$$

La suite $(u_n - 1)$ est géométrique de raison -1 et de premier terme $u_0 - 1 = 1$. On a donc, pour tout entier n :

$$u_n - 1 = (-1)^n \quad \text{donc} \quad u_n = (-1)^n + 1.$$

SF46 Résoudre une équation pour une suite récurrente linéaire d'ordre 2

Exemple

Soit u la suite donnée par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et la relation $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

L'équation $r^2 = 4r - 4$ admet 2 pour unique solution. On en déduit qu'il existe des réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\alpha n + \beta)2^n.$$

Enfin, on a :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = 1 \\ (\alpha + \beta)2 = 0 \end{cases},$$

d'où $\alpha = -1$ et $\beta = 1$. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (1 - n)\,2^n.$$

SF47 Utiliser Python pour une approche numérique

Lorsque u est définie en fonction de n alors, pour programmer cette suite en Python, il suffit de définir u comme une fonction. Lorsque la suite est définie par récurrence, on fait reposer le calcul sur une boucle.

Exemples

1 ▹ Définir en Python la suite u donnée par : $u_n = 2n^2 - 1$.

```python
def u(n):
    return(2*n**2+1)
```

2 ▹ Définir en Python la suite v donnée par $v_0 = 3$ et la relation : $v_{n+1} = nv_n + 1$.

```python
def v(n):
    v=3
    for k in range(n):
        v=k*v+1
    return(v)
```

C.3 - Suites réelles

C.3.a - Comment montrer qu'une suite converge ?

SF48 Utiliser la définition

La technicité des raisonnements en ε, n_0 n'est pas la finalité du programme néanmoins il faut être capable de manipuler ce formalisme dans des cas simples.

Exemple

Montrer que $\frac{(-1)^n}{n}$ tend vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ alors pour tout $n \geqslant n_0$, on a :

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \text{ donc } 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

puis :

$$\forall n \geqslant n_0, \left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| < \varepsilon,$$

ce qui signifie la convergence vers 0 de la suite considérée.

SF49 Effectuer des opérations algébriques à partir de suites dont on connaît le comportement

On cherche à décomposer la suite considérée, à l'aide d'opérations algébriques et de suites dont on connaît le comportement asymptotique.

Exemple

Étudier la convergence de la suite u donnée, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_n = \frac{1}{3^n} - \frac{n+3}{n^2+1}.$$

La suite u est la somme de la suite géométrique $\left(\frac{1}{3^n}\right)$, qui converge vers 0, et de la suite v donnée par :

$$v_n = -\frac{n+3}{n^2+1} = -\frac{1}{n} \frac{1 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}}.$$

On a :

$$\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$$

donc, par produits, sommes et quotients de suites convergentes, on obtient la convergence de la suite v (vers 0) donc également celle de u.

SF50 Utiliser le théorème de la limite monotone

On a évoqué comment montrer qu'une suite est monotone. L'un des intérêts est qu'une suite monotone admet toujours une limite finie ou infinie : une suite croissante est soit convergente, soit divergente vers $+\infty$; une suite décroissante est soit convergente, soit divergente vers $-\infty$.

Exemple

Montrer la convergence de la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Tout d'abord, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0,$$

donc la suite u est (strictement) croissante.

D'autre part, pour tout entier $n \geqslant 2$, on écrit :

$$\begin{aligned}
u_n &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \\
&\leqslant 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \text{ car } k! \geqslant 2^{k-1} \\
&\leqslant 2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{2^k} \\
&\leqslant 2 + \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} \\
&\leqslant 2 + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\
&\leqslant 3.
\end{aligned}$$

La suite u est donc croissante et majorée donc elle converge.

SF51 Encadrer par deux suites convergentes de même limite

Il s'agit d'utiliser le théorème d'encadrement.

Exemple

Déterminer la limite de la suite u définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}.$$

On a facilement :

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}}.$$

On a :

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \text{ et } \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

donc, par encadrement, la suite u converge également et sa limite est 1.

Une variante consiste à majorer $|u_n - \ell|$ par une suite de limite nulle :

$$0 \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon_n \text{ avec } \varepsilon_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Exemple

Déterminer la limite de la suite u définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$u_n = \frac{\sin(n)}{n^2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} |u_n - 0| &= \left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

or $\frac{1}{n^2}$ tend vers 0 donc, par majoration, la suite u tend vers 0.

SF52 Considérer la suite des termes d'indices pairs et celle des termes d'indices impairs

En montrant que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite, on obtient la convergence de la suite u vers cette limite.

Exemple

Étudier la convergence de la suite u donnée, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$u_n = \frac{1-(-1)^n}{n}.$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_{2n} = 0 \text{ et } u_{2n+1} = \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent donc toutes deux vers 0 donc la suite u également.

SF53 Utiliser la notion de suites adjacentes

Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent vers la même limite.

Exemple

Soit x un réel, montrer la convergence vers x des suites u et v des approximations décimales de x, données par :

$$u_n = \frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{\lfloor 10^n x\rfloor + 1}{10^n}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{\left\lfloor 10^{n+1} x\right\rfloor}{10^{n+1}} - \frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n} \\ &= \frac{\left\lfloor 10^{n+1} x\right\rfloor - 10\lfloor 10^n x\rfloor}{10^{n+1}} \\ v_{n+1} - v_n &= \frac{\left\lfloor 10^{n+1} x\right\rfloor + 1}{10^{n+1}} - \frac{\lfloor 10^n x\rfloor + 1}{10^n} \\ &= \frac{\left\lfloor 10^{n+1} x\right\rfloor - 10\lfloor 10^n x\rfloor - 9}{10^{n+1}}. \end{aligned}$$

La définition de la partie entière de $\lfloor 10^n x \rfloor$ donne :

$$\lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1,$$

d'où :

$$10\lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^{n+1} x < 10\lfloor 10^n x \rfloor + 10,$$

ce qui conduit à :

$$10\lfloor 10^n x \rfloor \leqslant \left\lfloor 10^{n+1} x \right\rfloor \text{ et } \left\lfloor 10^{n+1} x \right\rfloor < 10\lfloor 10^n x \rfloor + 10.$$

Ces deux inégalité montrent que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \text{ et } v_{n+1} - v_n \leqslant 0$$

et les suites u et v sont donc respectivement croissante et décroissante. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_n - u_n = \frac{1}{10^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Les suites u et v sont donc adjacentes. On en déduit qu'elles convergent vers la même limite.

SF54 Montrer que la suite est équivalente à une suite convergente

Cette idée repose sur le fait que deux suites équivalentes sont de même nature (convergente ou divergente).

Exemple

Montrer la convergence de la suite u donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{3n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2}.$$

On a $3n^2 + 2n + 1 \sim 3n^2$ et $n^2 + 2 \sim n^2$, d'où :

$$u_n \sim \frac{3n^2}{n^2} \text{ i.e. } u_n \sim 3.$$

Donc la suite u converge (vers 3).

C.3.b - Comment montrer qu'une suite diverge ?

SF55 Utiliser le théorème de la limite monotone

C'est le cas où la suite considérée est croissante et non majorée donc divergente vers $+\infty$, ou décroissante et non minorée donc divergente vers $-\infty$.

Exemple

Montrer la divergence vers $+\infty$ de la suite u donnée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Tout d'abord, il s'agit bien d'une suite croissante puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} > 0.$$

D'autre part, on part de la constatation suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &\geqslant \frac{1}{2^1},\\
\frac{1}{3} + \frac{1}{4} &\geqslant 2^1 \times \frac{1}{2^2},\\
\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} &\geqslant 2^2 \times \frac{1}{2^3},\\
\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} &\geqslant 2^3 \times \frac{1}{2^4}, \ldots
\end{aligned}$$

On écrit alors pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
u_{2^\mathrm{N}} &= \sum_{k=1}^{2^\mathrm{N}} \frac{1}{k}\\
&= 1 + \sum_{\ell=0}^{\mathrm{N}-1} \sum_{k=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}} \frac{1}{k}\\
&\geqslant 1 + \sum_{\ell=0}^{\mathrm{N}-1} 2^\ell \times \frac{1}{2^{\ell+1}}\\
&\geqslant 1 + \sum_{\ell=0}^{\mathrm{N}-1} \frac{1}{2}\\
&\geqslant 1 + \frac{\mathrm{N}}{2}.
\end{aligned}$$

Comme la suite $\left(1 + \frac{\mathrm{N}}{2}\right)_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, il en est de même de la suite u. Donc la suite u diverge vers $+\infty$.

SF56 Majorer ou minorer par une suite divergente de limite infinie

En minorant par une suite de limite $+\infty$, on obtient la divergence vers $+\infty$; en majorant par une suite de limite $-\infty$, on obtient la divergence vers $-\infty$.

Exemple

Déterminer la limite de la suite u définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$u_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \left(2 - \frac{k}{2n}\right).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} v_n = \prod_{k=1}^{2n-1}\left(2-\frac{k}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{2n-1}\frac{4n-k}{2n} \\ = \prod_{k=1}^{n}\underbrace{\frac{4n-k}{2n}}_{\geqslant \frac{3}{2}}\prod_{k=n+1}^{2n-1}\underbrace{\frac{4n-k}{2n}}_{\geqslant 1} \\ \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n \end{aligned}$$

or $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ tend vers $+\infty$ donc, par minoration, la suite (v_n) tend également vers $+\infty$.

SF57 Considérer la suite des termes d'indices pairs et celle des termes d'indices impairs

Si l'une des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) n'admet pas de limite ou si ces deux suites admettent des limites différentes alors la suite u n'admet pas de limite.

Exemple

Montrer que, pour $q \leqslant -1$, la suite (q^n) n'admet pas de limite.

Commençons par le cas $q = -1$ en posant $u_n = (-1)^n$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = 1 \text{ et } u_{2n+1} = -1,$$

et les suites (constantes) (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers des limites différentes donc u n'admet pas de limite.
Dans le cas où $q < -1$, posons $u_n = q^n$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = \left|q^2\right|^n \text{ et } u_{2n+1} = -|q|\left|q^2\right|^n.$$

Comme une suite géométrique de raison dans $]1, +\infty[$ diverge vers $+\infty$ et puisque $\left|q^2\right| > 1$, on en déduit que :

$$u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \text{ et } u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty.$$

Il s'ensuit à nouveau que u n'admet pas de limite.

SF58 Montrer que la suite est équivalente à une suite divergente

Là encore, l'idée repose sur le fait que deux suites équivalentes sont de même nature (convergente ou divergente).

Exemple

Montrer la divergence de la suite u donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{(-1)^n n^2 - 2n + 3}{n^2 + n + 1}.$$

On a :

$$\frac{(-1)^n n^2 - 2n + 3}{(-1)^n n^2} = 1 - \frac{2}{(-1)^n n} + \frac{3}{(-1)^n n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$

donc :

$$(-1)^n n^2 - 2n + 3 \sim (-1)^n n^2 \text{ et } n^2 + n + 1 \sim n^2,$$

d'où :

$$u_n \sim \frac{(-1)^n n^2}{n^2} \text{ } i.e. \text{ } u_n \sim (-1)^n.$$

Donc la suite u n'admet pas de limite.

C.3.c - Comment calculer ou approcher la limite d'une suite ?

On a déjà évoqué l'idée de l'encadrement (ou de la majoration en valeur absolue par une suite tendant vers 0) qui fournit à la fois la convergence et la valeur de la limite.

SF59 Obtenir la limite à partir d'opérations algébriques

Le premier réflexe à avoir est de décomposer la suite considérée à partir d'opérations algébriques (sommes, produits, etc.) en fonction de suites usuelles dont on connaît les limites.

Exemple

Déterminer la limite de la suite u donnée par : $u_n = \dfrac{5n^2+n+1}{3n^2+4}$.

On commence par simplifier cette expression :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n^2}{n^2}\frac{5+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{4}{n^2}} \\ &= \frac{5+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{4}{n^2}}. \end{aligned}$$

On a :

$$\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et } \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

donc :

$$5+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 5 \text{ et } 3+\frac{4}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3,$$

d'où :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{5}{3}.$$

SF60 Utiliser des équivalents

Dans un calcul de limite où n'interviennent que des produits, des quotients et des élévations à une puissance réelle, on peut remplacer un terme par un terme qui lui est équivalent.

Exemple

Calculer la limite de la suite u définie pour $n \geqslant 2$ par :

$$u_n = n\ln\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\right).$$

Tout d'abord, on peut écrire :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \\ &= \frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right). \end{aligned}$$

On a $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$ or :

$$\frac{2}{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

donc on peut écrire :

$$\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right) \sim \frac{2}{n-1},$$

puis :

$$\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right) \sim \frac{n}{2}\times\frac{2}{n-1} = \frac{n}{n-1}.$$

On en déduit que :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

SF61 Obtenir une inégalité entre les limites de deux suites

Si deux suites u et v sont telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, u converge vers ℓ et v converge vers ℓ', alors $\ell \leqslant \ell'$; ce résultat s'applique en particulier si l'une des suites est constante.

Exemple

Encadrer la limite de la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

On a vu que cette suite est convergente et majorée par 3. D'autre part, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1+1+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k!} > \frac{5}{2}.$$

On obtient donc aisément le fait que la limite appartient à $\left[\frac{5}{2}, 3\right]$.

On peut en fait montrer que la limite est égale à e.

SF62 Utiliser l'encadrement fourni par deux suites adjacentes

Les termes de deux suites adjacentes encadrent leur limite commune.

Exemple

Montrer que la limite des approximations décimales d'un réel x est bien x.

On a montré plus haut que les suites données par :

$$u_n = \frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{\lfloor 10^n x\rfloor + 1}{10^n}$$

sont des suites adjacentes et qu'elles convergent donc. De plus, l'encadrement :

$$\lfloor 10^n x\rfloor \leqslant 10^n x < \lfloor 10^n x\rfloor + 1,$$

donne pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \leqslant x \leqslant v_n$$

et le théorème d'encadrement (avec pour suite « centrale » la suite constante égale à x) assure que la limite commune des deux suites est bien x.

SF63 Utiliser Python pour une approche numérique

Plaçons nous dans la situation d'une suite réelle u dont on a montré la convergence vers une limite ℓ. Il arrive fréquemment que l'on ne détermine pas ℓ mais que l'on majore l'écart entre les termes de la suite et cette limite sous la forme :

$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon_n,$$

où $(\varepsilon_n)_n$ est une suite de limite nulle.

Si l'on souhaite obtenir une valeur approchée de ℓ à une précision $\delta > 0$ près alors il suffit de trouver n tel que $\varepsilon_n \leqslant \delta$ afin que u_n soit *a fortiori* une valeur approchée de ℓ à δ près. Cette recherche d'un tel entier n se programme facilement, par exemple en Python, à l'aide d'une boucle.

Exemple

Déterminer une valeur approchée de e à 10^{-5} près sachant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left| \mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| \leqslant \frac{2}{n!}.$$

On importe la fonction `factorial` du module `math` puis, à l'aide d'une boucle `while` on détermine le plus petit entier n tel que $\frac{2}{n!} \leqslant 10^{-5}$.

```
from math import factorial
n=0
u=1
while 2/factorial(n)>1E-5:
    n=n+1
    u=u+1/factorial(n)
print('Pour n=',n,'la valeur obtenue est: ',u)
```

Le résultat affiché est :

```
Pour n= 9 la valeur obtenue est:  2.7182815255731922
```

Une autre situation dans laquelle l'approche numérique s'avère pertinente et aisée est celle des suites adjacentes.

En effet, lorsque u et v sont adjacentes alors elles convergent vers une même limite ℓ et on a (avec par exemple u croissante et v décroissante) pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

Il s'ensuit que si $|v_n - u_n|$ est inférieur à une précision $\delta > 0$ fixée, alors toute valeur entre u_n et v_n (par exemple la moyenne de u_n et v_n) fournit une valeur approchée de ℓ à δ près.

Exemple

On considère les suites u et v données pour $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

En admettant que ces deux suites sont adjacentes, déterminer une valeur approchée à 10^{-5} près de leur limite.

Cette fois-ci, la condition porte sur l'écart entre u_n et v_n (en considérant la valeur absolue de façon générale pour ne pas à avoir à déterminer la suite qui décroît et celle qui croît).

```
from math import factorial
n=1
u=2
v=u+1/(n*factorial(n))
while abs(u-v)>1E-5:
    n=n+1
    u=u+1/factorial(n)
    v=u+1/(n*factorial(n))
print((u+v)/2)
```

Le résultat affiché est :

```
2.7182803199404764
```

C.4 - Calcul de dérivées et de primitives

C.4.a - Comment étudier une fonction ?

SF64 Justifier la dérivabilité d'une fonction

Exemple

Étudier la dérivabilité de la fonction f donnée par : $f(x) = \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^*$.

La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc, par composition, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

La fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (également en 0 mais f n'y est pas définie) et à valeurs dans $]1,+\infty[$; comme $]1,+\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$, il s'ensuit par composition que $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Ainsi, f est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

SF65 Calculer la dérivée d'une fonction

Il est rare que l'on revienne à la définition de la dérivée pour la calculer. En général, on utilise les règles de calcul ainsi que les fonctions de référence.

Exemple

Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x^2}$.

Il s'agit de la composée des deux fonctions exp et $x \mapsto -x^2$ qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus, f est de la forme $f(x) = e^{u(x)}$ donc $f'(x) = e^{u(x)}u'(x)$ et on a : $f'(x) = -2xe^{-x^2}$.

SF66 Déterminer le sens de variation d'une fonction dérivable

Le signe de la dérivée donne le sens de variation de la fonction. Il faut bien noter que la monotonie peut être stricte bien que la dérivée s'annule ; c'est le cas lorsque la dérivée ne s'annule pas sur un intervalle.

Exemple

Étudier les variations de la fonction f définie sur : $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$.

Tout d'abord, l'expression $x^2 - 4x$ s'annule pour $x = 0$ et $x = 4$, elle est positive ou nulle sur $\mathscr{D} =]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[$. Ainsi, $\mathscr{D}$ est le domaine de définition de f. De plus, la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction polynomiale est dérivable sur $\widetilde{\mathscr{D}} =]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Donc, par composition, f est dérivable sur $\widetilde{\mathscr{D}}$ et on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 4x}} \times (2x - 4) = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x}}.$$

Le signe de cette expression est celui du numérateur donc $f'(x) < 0$ lorsque $x < 0$ et $f'(x) > 0$ lorsque $x > 4$. Comme f est de plus continue en 0 et en 4, on en déduit que f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et est strictement croissante sur $[4, +\infty[$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$		$\Vert$	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0		0	$\nearrow$	

C.4.b - Comment exploiter une étude de fonction ?

SF67 Interpréter le sens de variation d'une fonction

L'étude des variations d'une fonction permet d'interpréter un phénomène lié à la fonction. Elle peut également mettre en évidence des extremums que l'on peut ensuite interpréter en revenant à la situation modélisée par cette fonction.

Exemple

Pour quel entier $n \geqslant 1$, le réel $\sqrt[n]{n}$ est-il maximal ?

On a $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{1}{n}\ln(n)}$ donc il est pertinent d'étudier la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = e^{\frac{\ln(x)}{x}}$. Les fonctions ln et inverse sont dérivables sur $[1, +\infty[$ et la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, par produit et composition, la fonction f est dérivable sur $[1,+\infty[$ et on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln(x)}{x^2}e^{\frac{\ln(x)}{x}} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}e^{\frac{\ln(x)}{x}}.$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $1-\ln(x)$ ce qui conduit au tableau ci-dessous.

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$	$\searrow$	

Il reste à examiner numériquement les valeurs aux premiers entiers (par exemple en Python) :

```python
from math import exp,log
def f(x):
    return(exp(log(x)/x))
for k in range(1,6):
    print(k,f(k))
```

ce qui affiche :

```
1 1.0
2 1.414213562373095
3 1.4422495703074085
4 1.414213562373095
5 1.3797296614612147
```

Compte tenu de la stricte décroissance à partir de e, on en déduit que les valeurs suivantes sont inférieures à celle de $f(3)$.

Finalement, l'expression $\sqrt[n]{n}$ est maximale pour $n = 3$.

C.5 - Limites et continuité

C.5.a - Comment montrer qu'une limite existe et la calculer ?

SF68 **Utiliser les règles de calcul et les croissances comparées**

Comme dans le cas des suites, on peut effectuer des opérations algébriques sur les limites. On dispose également du théorème de composition et des croissances comparées.

Exemple

Déterminer la limite en $+\infty$ de $x^2\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$.

Tout d'abord, on remarque que pour $x > 0$, on a :

$$x^2\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} = \sqrt{x}^4\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}.$$

Par croissance comparées, on a :

$$t^4\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

or $\sqrt{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc, par composition de limites :

$$x^2 \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} = \sqrt{x}^4 \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

SF69 Utiliser des inégalités

Techniquement, il n'y a rien de nouveau par rapport à l'utilisation qui en est faite dans le cas des suites. Notons par ailleurs que l'on utilise souvent le théorème d'encadrement en majorant la valeur absolue par une expression de limite nulle. Dans le cas d'une limite infinie, il suffit d'un majorant ou d'un minorant selon le cas.

Exemples

1 ▹ Déterminer la limite en $+\infty$ de $\dfrac{\cos(x)}{x}$.

Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\frac{-1}{x} \leqslant \frac{\cos(x)}{x} \leqslant \frac{1}{x}$$

et les expressions de gauche et de droite tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$ donc, par encadrement, on a :

$$\frac{\cos(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Cependant, on peut aussi écrire plus brièvement :

$$\forall x > 0,\ \left|\frac{\cos(x)}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x}$$

or l'expression de droite tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ donc, par majoration, on retrouve le résultat.

2 ▹ Déterminer la limite en $+\infty$ de $\lfloor x \rfloor$.

Pour tout réel x, on a : $x - 1 < \lfloor x \rfloor$. L'expression de gauche tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ donc, par minoration, on a :

$$\lfloor x \rfloor \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

SF70 Utiliser des équivalents

Des fonctions équivalentes ont même limite donc, dans un calcul de limite qui ne fait intervenir que des produits et des quotients, on peut remplacer chaque fonction par une fonction équivalente (en particulier lorsqu'il s'agit de fonctions usuelles.

Exemple

Calculons la limite en 0 de $f(x) = \dfrac{(x^2 + 3x^5)\ln(1+x)}{x\left(\sqrt{1+2x} - 1\right)}$.

En utilisant les équivalents usuels, on peut écrire : $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2 \times x}{x \times \frac{1}{2}(2x)}$.

Cela donne $f(x) \underset{0}{\sim} x$ et la limite est donc nulle.

SF71 Ramener l'étude à un calcul de limite en 0

Cela permet d'utiliser le catalogue de limites et d'équivalents usuels.

Exemple

Calculer la limite en 1 de $f(x) = \dfrac{2}{1-x^2} - \dfrac{3}{1-x^3}$.

En posant $x = 1+h$ on obtient :

$$f(1+h) = \frac{2}{1-(1+h)^2} - \frac{3}{1-(1+h)^3}$$

puis en développant :

$$f(1+h) = \frac{2}{1-(1+2h+h^2)} - \frac{3}{1-(1+3h+3h^2+h^3)}$$

et en réduisant :

$$f(1+h) = \frac{2}{-2h-h^2} - \frac{3}{-3h-3h^2-h^3}.$$

On réduit au même dénominateur :

$$f(1+h) = \frac{2(-3-3h-h^2)-3(-2-h)}{h(-2-h)(-3-3h-h^2)}$$

d'où en simplifiant :

$$f(1+h) = \frac{-2h-3}{(h+2)(h^2+3h+3)}$$

ce qui permet d'écrire :

$$f(1+h) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{-3}{6}.$$

Donc $f(1+h)$ tend vers $-\frac{1}{2}$ quand h tend vers 0 ce qui signifie :

$$f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} -\frac{1}{2}.$$

SF72 Montrer qu'une fonction n'admet pas de limite

Si l'on cherche à prouver qu'une fonction f n'admet pas de limite en a alors il suffit de trouver deux suites tendant vers a dont les images par f tendent vers des limites différentes.

Exemple

Montrer que la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$.

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose :

$$x_n = 2n\pi \quad \text{et} \quad y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$$

alors les suites (x_n) et (y_n) tendent toutes deux vers $+\infty$.

Cependant, on a :

$$\sin(x_n) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \sin(y_n) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Donc la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$.

C.5.b - Comment étudier la continuité d'une fonction ?

SF73 Considérer la fonction comme une somme, composée, etc. de fonctions continues

La démarche la plus directe consiste, lorsque c'est possible, à décrire la fonction considérée comme le résultat d'opérations algébriques et de compositions à partir de fonctions que l'on sait continues.

Exemple

Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 e^{\sqrt{x^2+1}}.$$

La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}$, elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc, par composition, la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, la fonction $x \mapsto e^{\sqrt{x^2+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Enfin, la fonction $x \mapsto x^3$ est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}$ et le produit avec la fonction précédente définit donc une fonction continue sur $\mathbb{R}$ ce qui signifie que f est continue sur $\mathbb{R}$.

SF74 Utiliser la limite en un point

Souvent, la méthode précédente permet d'obtenir la continuité sur tout $\mathbb{R}$ sauf en quelques points. Il reste alors à examiner ces points là spécifiquement.

Exemple

Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

La fonction f coïncide avec une fonction affine sur $\mathbb{R}_+^*$ et avec la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}_-^*$ donc est continue sur ces deux intervalles. D'autre part, on a :

$$x+1 \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \quad \text{et} \quad e^x \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

ce qui signifie :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$$

or $f(0) = 1$ donc f est continue en 1. Il s'ensuit que f est continue sur $\mathbb{R}$.

C.5.c - Comment résoudre une équation à l'aide de la continuité ?

SF75 Utiliser les suites pour résoudre des équations fonctionnelles

L'utilisation de suites permet d'utiliser une hypothèse de continuité ponctuelle.

Exemple

Considérons une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(3x) = f(x).$$

Montrer que f est constante.

Fixons un réel a alors l'hypothèse donne :

$$f(a) = f(a/3)\ ,\ f(a/3) = f(a/9)\ ,\dots$$

et, à l'aide d'une récurrence immédiate, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(a) = f\Big(\frac{a}{3^n}\Big).$$

Considérons alors la suite (a_n) donnée par $a_n = \frac{a}{3^n}$. Cette suite est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ donc converge vers 0 et la continuité de f en 0 permet d'écrire :

$$f(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0).$$

Cependant, la relation établie ci-dessus montre que la suite $(f(a_n))$ est constante égale à $f(a)$. On en déduit que $f(a) = f(0)$ et le réel a étant quelconque, il s'ensuit que la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

SF76 Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à une fonction auxiliaire

Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un réel en lequel une fonction continue qui change de signe s'annule. Il convient donc de transformer le problème étudié en un problème relatif à l'annulation d'une fonction auxiliaire.

Exemple

Montrer qu'une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ continue admet un point fixe.

Il s'agit de montrer qu'il existe un réel c entre 0 et 1 tel que $f(c) = c$. Considérons la fonction :

$$g : [0,1] \to [0,1],\ x \mapsto g(x) = f(x) - x.$$

La fonction g est la différence entre deux fonctions continues donc est continue sur $[0,1]$. De plus, le fait que f soit à valeurs dans $[0,1]$ implique :

$$g(0) = f(0) - 0 \geqslant 0 \ \text{ et } \ g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0.$$

Ainsi, la fonction g est continue sur $[0,1]$ et les valeurs en 0 et en 1 sont de signes opposés donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel c dans l'intervalle $[0,1]$ tel que $g(c) = 0$ ce qui signifie que $f(c) = c$.

SF77 Utiliser une propriété asymptotique puis utiliser le TVI

Le théorème des valeurs intermédiaires s'utilise très souvent sous la deuxième forme évoquée, il convient donc de mettre en évidence des réels a et b, dont les images par la fonction sont de signes opposés ; cela peut se faire à l'aide de la définition d'une limite avec des quantificateurs.

Exemple

Montrer qu'un polynôme de degré impair s'annule sur $\mathbb{R}$.

Tout d'abord, en notant P ce polynôme et quitte à échanger P avec $-$P (ce qui ne modifie pas la conclusion), on peut supposer que le coefficient dominant est positif ce qui induit :

$$\mathrm{P}(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty \ \text{ et } \ \mathrm{P}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

On utilise alors la définition des limites pour écrire :

$$\exists a \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ \Big(x \leqslant a \Rightarrow \mathrm{P}(x) \leqslant -1\Big)$$

et :

$$\exists b \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ \Big(x \geqslant b \Rightarrow \mathrm{P}(x) \geqslant 1\Big).$$

On en déduit que $a \leqslant b$, $\mathrm{P}(a) < 0$ et $\mathrm{P}(b) > 0$. Puisque la fonction polynomiale P est continue sur $\mathbb{R}$, il découle du théorème des valeurs intermédiaires que P s'annule (entre a et b).

C.5.d - Comment montrer qu'une fonction continue est bornée ?

SF78 Appliquer le théorème des bornes à une fonction auxiliaire

Dans le cas d'une fonction continue sur un segment, on dispose d'un double résultat : la fonction est bornée et ses bornes sont atteintes. Dans le même esprit que plus haut, on peut chercher à transformer le problème afin qu'il porte sur le caractère borné d'une fonction auxiliaire.

Exemple

Considérons deux fonctions f et g continues sur un intervalle $[a,b]$ et vérifiant :

$$\forall x \in [a,b],\ f(x) > g(x).$$

Montrer qu'il existe un réel $m > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a,b],\ f(x) > g(x) + m.$$

Notons que Ce résultat n'est en rien évident. Géométriquement, l'hypothèse signifie que le graphe de f est au dessus de celui de g. Le résultat signifie que l'on peut translater celui de g vers le haut en restant encore sous celui de f. C'est bien entendu faux lorsque l'intervalle n'est pas un segment : penser par exemple au graphe de $x \mapsto 1/x$ sur $[1,+\infty[$ et à celui de la fonction nulle.

Considérons la fonction h définie sur $[a,b]$ par :

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

La fonction h est la différence de deux fonctions continues donc est continue sur le segment $[a,b]$, on en déduit en particulier qu'elle est minorée et atteint son minimum : il existe x_0 dans $[a,b]$ tel que $h(x) \geqslant h(x_0)$ pour tout x dans $[a,b]$. Par ailleurs, l'hypothèse signifie que h est à valeurs strictement positives donc $h(x_0) > 0$ et en posant $m = h(x_0)/2$, on a bien :

$$m > 0 \ \text{ et } \ \forall x \in [a,b],\ f(x) - g(x) > m$$

ce qui correspond au résultat souhaité.

SF79 Combiner l'utilisation du théorème des bornes avec une propriété asymptotique

Voici un cas d'application des définitions des limites : on « laisse de côté » le cas d'un segment, on peut alors utiliser le théorème des bornes.

Exemple

Montrer qu'une fonction continue $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, qui admet une limite en $+\infty$, est une fonction bornée.

Notons ℓ la limite et appliquons la définition (avec, de façon arbitraire, $\varepsilon = 1$) :

$$\exists \mathrm{A} \in \mathbb{R} \ /\ \forall x \in [0,+\infty[,\ \left(x \geqslant \mathrm{A} \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\right).$$

Ainsi, pour tout $x \in [\mathrm{A},+\infty[$, on a :

$$\ell - 1 \leqslant f(x) \leqslant \ell + 1.$$

D'autre part, la fonction f est continue sur le segment $[0,\mathrm{A}]$ donc elle y est bornée (et atteint ses bornes) ce qui signifie qu'il existe des réels m et M tels que :

$$\forall x \in [0, \mathrm{A}],\ m \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M}.$$

Finalement, on a :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ \min\{m; \ell - 1\} \leqslant f(x) \leqslant \max\{\mathrm{M}; \ell + 1\}$$

donc f est bornée sur $[0, +\infty[$.

C.6 - Dérivation

C.6.a - Comment étudier la dérivabilité et la dérivée d'une fonction ?

Les techniques de bases ont été vues plus haut.

SF80 Utiliser les notions de dérivée à gauche ou à droite

Ces notions permettent de compléter l'étude de la dérivabilité.

Exemple

Étudier la dérivabilité de la fonction valeur absolue.

La fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée constante égale à 1 et qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ de dérivée constante égale à -1. De plus pour x non nul :

$$\frac{|x| - 0}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

donc la limite à droite en 0 est égale à 1 et la limite à gauche est égale à -1. Il s'ensuit que la fonction est dérivable à droite et à gauche en 0 (de dérivée à droite égale à 1 et à gauche égale à -1).

SF81 Invoquer le théorème de la bijection

On considère une fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Tout d'abord, il est évident que f réalise une surjection de I sur $f(\mathrm{I})$ et qu'elle est injective du fait de la stricte monotonie. Le théorème de la bijection indique que, du fait de la continuité, $f(\mathrm{I})$ est un intervalle et que l'application réciproque f^{-1} est continue sur celui-ci. De plus, on a un résultat de dérivabilité : lorsque f est dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$, la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ avec la dérivée donnée par :

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

Exemple

Étudier la dérivabilité de la réciproque de la fonction f donnée sur $f(x) = x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée donnée par :

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Cette dérivée ne s'annule qu'en 0. Cependant, la parité de n intervient pour déterminer si la fonction est bijective ou non.

Si n est impair alors $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et continue, donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Puisque f' ne s'annule qu'en 0 et $f(0) = 0$, il s'ensuit que f^{-1} (c'est-à-dire la fonction $\sqrt[n]{\ }$) est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)} = \frac{1}{n\big(f^{-1}(x)\big)^{n-1}},$$

ce qui donne :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{n}\frac{f^{-1}(x)}{\big(f^{-1}(x)\big)^n} = \frac{1}{n}\frac{f^{-1}(x)}{x}.$$

Puisque $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, on a :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Dans le cas où n est pair, on a $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et continue, donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers son image $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+^*$. Puisque f' ne s'annule qu'en 0 et $f(0) = 0$, il s'ensuit que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et les mêmes calculs que dans le cas impair donnent la même expression de la dérivée.

SF82 Utiliser les dérivées successives

Les dérivées successives d'une fonction peuvent par exemple servir à étudier une fonction : si l'on n'arrive pas déterminer le signe de f' alors on peut étudier f' en déterminant le signe de f''.

Exemple

Montrer que, pour tout réel x, on a : $\cos(x) \leqslant 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$.

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4.$$

Il s'agit de la somme de la fonction cos et d'une fonction polynomiale donc f est infiniment dérivable. On a successivement :

$$f'(x) = -\sin(x) + x - \frac{1}{6}x^3,$$
$$f''(x) = -\cos(x) + 1 - \frac{1}{2}x^2,$$
$$f'''(x) = \sin(x) - x,$$
$$f^{(4)}(x) = \cos(x) - 1 \leqslant 0.$$

On en déduit les variations de f''' :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f^{(4)}(x)$		$-$		$-$	
$f'''(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	

D'où les variations de f'' :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'''(x)$		$+$		$-$	
$f''(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

On en déduit les variations de f' :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$-$	
$f'(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	

Enfin, on obtient les variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Par conséquent $f(x) \leqslant 0$ pour tout réel x, ce qui induit l'inégalité annoncée.

C.6.b - Comment lier la dérivée et les variations d'une fonction ?

L'idée essentielle sur le plan pratique a été par exemple vue dans l'exemple précédent : le signe de la dérivée indique le sens de variation de la fonction. On peut cependant ajouter quelques idées.

SF83 **Chercher des extremums là où la dérivée s'annule**

Cet intitulé est légèrement imprécis puisqu'il peut y avoir un extremum en un point où la fonction n'est pas dérivable et un extremum peut se situer au bord de l'intervalle d'étude par exemple sans que la dérivée s'y annule. Cependant, s'il y a un extremum à l'intérieur du domaine de définition et si la fonction est dérivable en ce point alors la dérivée s'y annule.

Exemple

Déterminer les éventuels extremums de la fonction f donnée sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + \sin(x).$$

La fonction identité et la fonction sinus étant dérivables, la fonction f l'est également. On a :

$$f'(x) = 1 + \cos(x),$$

donc la dérivée s'annule en tous les $(2k+1)\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

Examinons le comportement de la fonction en $x_0 = (2k+1)\pi$. On considère un réel h, alors :

$$\begin{aligned} f(x_0+h) - f(x_0) &= h + \sin(x_0+h) - \sin(x_0) \\ &= h + \sin\big((2k+1)\pi + h\big) - \sin\big((2k+1)\pi\big) \\ &= h + \sin(\pi + h) \\ &= h - \sin(h). \end{aligned}$$

On a :

$$h - \sin(h) \underset{0}{\sim} \frac{1}{6}h^3,$$

il s'ensuit que $f(x_0+h) - f(x_0)$ est du signe de h^3 lorsque h est proche de 0, donc n'est pas de signe constant.

On en déduit que f ne présente pas d'extremum en x_0.

Par conséquent, f n'a pas d'extremum.

SF84 Justifier l'annulation de la dérivée par le théorème de Rolle

Lorsqu'une fonction f continue sur un segment $[a,b]$, et dérivable sur l'intervalle $]a,b[$, est telle que $f(a) = f(b)$, il existe un point en lequel la dérivée de f s'annule. Un cas fréquent d'utilisation est lorsque f s'annule en deux points, alors f' s'annule entre ces points.

Exemple

Soit f une fonction 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui s'annule en 0, 1 et 2. Montrer que f'' s'annule entre 0 et 2.

La fonction f est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$, de plus on a $f(0) = f(1) = 0$ donc il existe $a \in]0,1[$ tel que $f'(a) = 0$.

De même, il existe $b \in]1,2[$ tel que $f'(b) = 0$.

La fonction f' étant dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ donc il existe $c \in]a,b[$ tel que $f''(c) = 0$.

Enfin, on a $0 < a < c < b < 2$ donc c est bien entre 0 et 2.

Cet exemple se généralise au cas d'une fonction n fois dérivable qui prend $n+1$ fois la même valeur, dans ce cas sa dérivée n-ième s'annule.

SF85 Lier l'accroissement de la fonction à sa dérivée

Le théorème des accroissements finis permet d'exprimer un taux d'accroissement comme une dérivée ; on en déduit notamment l'inégalité des accroissements finis.

Une situation fréquente d'utilisation est celle d'une suite u définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exemple

Soit u la suite donnée par $u_0 = 10$ et la relation : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$.

Il est aisé de voir que cette suite est à valeurs dans $\mathrm{I} = [\sqrt{2}, +\infty[$ et converge vers $\sqrt{2}$. Montrons que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{9}{2^n}.$$

La fonction f est dérivable sur I avec : $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$.

Soit x et y des réels de I (avec par exemple $x < y$), la fonction f est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$ donc, d'après le théorème des accroissement finis, il existe un réel c dans $]x, y[$ tel que :

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y).$$

Par ailleurs, on a : $0 \leqslant f'(c) \leqslant \frac{1}{2}$, ce qui conduit à :

$$\left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|x - y\right|.$$

Cette inégalité est également vraie en échangeant les rôles de x et y ainsi que pour $x = y$, il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| = \left|f(u_n) - f(\sqrt{2})\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|.$$

Par une récurrence immédiate, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}\left|u_0 - \sqrt{2}\right|.$$

Comme $u_0 = 10$ et $1 < \sqrt{2} < 2$, on obtient le résultat annoncé.

Le type d'étude présenté dans l'exemple précédent se prête bien à des calculs numériques.

C.7 - Développements limités

C.7.a - Comment calculer des développements limités ?

SF86 **Considérer des opérations algébriques à partir de développements limités connus**

Exemples

1 ▹ Déterminer le $DL_5(0)$ de $f(x) = e^x - \sin(x)$.

On écrit :

$$e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5),$$

et :

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5),$$

d'où :

$$e^x - \sin(x) \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5).$$

2 ▹ Déterminer le $DL_3(0)$ de $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1-x}$.

On a :

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \text{ et } \frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3).$$

Le produit des parties régulières donne :

$$\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\left(1+x+x^2+x^3\right) \underset{0}{=} \begin{array}{lll} x & +x^2 & +x^3 \\ & -\dfrac{x^2}{2} & -\dfrac{x^3}{2} \\ & & +\dfrac{x^3}{3}+o(x^3) \end{array}$$

Le $DL_3(0)$ de $f(x)$ est donc :

$$\frac{\ln(1+x)}{1-x} \underset{0}{=} x+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{6}+o(x^3).$$

SF87 Ramener le calcul à celui d'un développement limité en 0

Chercher un développement limité en a de f revient à chercher un développement limité en 0 de $h \mapsto f(a+h)$; de même, chercher un développement limité en $-\infty$ ou $+\infty$ de f revient à chercher un développement limité en 0^- ou en 0^+ de $h \mapsto f(1/h)$.

Exemple

Calculer le $DL_4(1)$ de $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x^2}$ en considérant la fonction $h \mapsto f(1+h)$.

On cherche un DL en 0 de : $h \mapsto f(1+h)=\dfrac{\ln(1+h)}{(1+h)^2}$.

On a :

$$\ln(1+h) \underset{0}{=} h-\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{3}h^3-\frac{1}{4}h^4+o(h^4),$$

et :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+h)^2} &= (1+h)^{-2} \\ &\underset{0}{=} 1-2h+3h^2-4h^3+5h^4+o(h^4).\end{aligned}$$

Le produit donne :

$$\frac{\ln(1+h)}{(1+h)^2} \underset{0}{=} h-\frac{5}{2}h^2+\frac{13}{3}h^3-\frac{77}{12}h^4+o(h^4),$$

donc :

$$f(x) \underset{1}{=} (x-1)-\frac{5}{2}(x-1)^2+\frac{13}{3}(x-1)^3-\frac{77}{12}(x-1)^4+o\big((x-1)^4\big).$$

SF88 Appliquer la formule de Taylor-Young

En dernier recours, on peut toujours revenir à cette formule !

Exemple

Calculer le $DL_3(0)$ de $f(x)=e^{\sin(x)}$.

La fonction f est infiniment dérivable car composée de fonctions qui le sont. Pour tout réel x, on a successivement :

$$f'(x)=\cos(x)e^{\sin(x)},$$

$$f''(x)=\big(\cos^2(x)-\sin(x)\big)e^{\sin(x)}$$

et :

$$f'''(x) = \Big(\cos^3(x) - 3\cos(x)\sin(x) - \cos(x)\Big)e^{\sin(x)}.$$

On en déduit :

$$f'(0) = 1,\ f''(0) = 1 \text{ et } f'''(0) = 0.$$

D'où :

$$e^{\sin(x)} \underset{0}{=} 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

C.7.b - Comment obtenir un équivalent d'une fonction ou d'une suite ?

SF89 **Considérer le premier terme non nul du développement limité**

Exemple

Donner un équivalent en 0 de $e^x - 1 + \ln(1-x)$.

On écrit :

$$e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3),$$

et :

$$\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + o(u^3),$$

ce qui donne en remplaçant u par $-x$:

$$\ln(1-x) \underset{0}{=} -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

et finalement :

$$e^x - 1 + \ln(1-x) \underset{0}{=} -\frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

On a donc :

$$e^x - 1 + \ln(1-x) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{6}x^3.$$

SF90 **Utiliser une fonction « correspondant » à la suite**

Si u est une suite donnée explicitement en fonction de n alors on écrit $u_n = f(n)$ et on utilise un développement limité en $+\infty$ de f.

Exemple

Déterminer un équivalent de la suite u donnée sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n = \exp\left(n\ln\left(3e^{\frac{\ln(2)}{n}} - 2e^{\frac{\ln(3)}{n}}\right)\right).$$

On a :

$$e^u \underset{0}{=} 1 + u + o(u),$$

or $\frac{\ln(2)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\frac{\ln(3)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'où :

$$e^{\frac{\ln(2)}{n}} \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{\ln(2)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

et :

$$e^{\frac{\ln(3)}{n}} \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{\ln(3)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} 3e^{\frac{\ln(2)}{n}} - 2e^{\frac{\ln(3)}{n}} &\underset{+\infty}{=} 3 + \frac{3\ln(2)}{n} - 2 - \frac{2\ln(3)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\underset{+\infty}{=} 1 + \frac{3\ln(2) - 2\ln(3)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Comme $\frac{3\ln(2)-2\ln(3)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il vient :

$$\ln\left(3e^{\frac{\ln(2)}{n}} - 2e^{\frac{\ln(3)}{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{3\ln(2) - 2\ln(3)}{n},$$

puis :

$$n\ln\left(3e^{\frac{\ln(2)}{n}} - 2e^{\frac{\ln(3)}{n}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3\ln(2) - 2\ln(3) \neq 0,$$

donc :

$$\exp\left(n\ln\left(3e^{\frac{\ln(2)}{n}} - 2e^{\frac{\ln(3)}{n}}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{3\ln(2)-2\ln(3)}.$$

Comme $e^{3\ln(2)-2\ln(3)} = \frac{8}{9} \neq 0$, il vient :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{8}{9}.$$

C.7.c - Comment exploiter des développements limités pour étudier une fonction ?

SF91 Calculer des limites

L'idée est analogue à celle évoquée pour l'utilisation d'équivalents mais les développements limités fournissent désormais un outil technique supplémentaire (il n'y a notamment plus la contrainte liée aux sommes de fonctions).

Exemple

Déterminer la limite en 0 de :

$$\frac{x - \sin(x)}{x - \operatorname{Arctan}(x)}.$$

On a :

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \operatorname{Arctan}(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

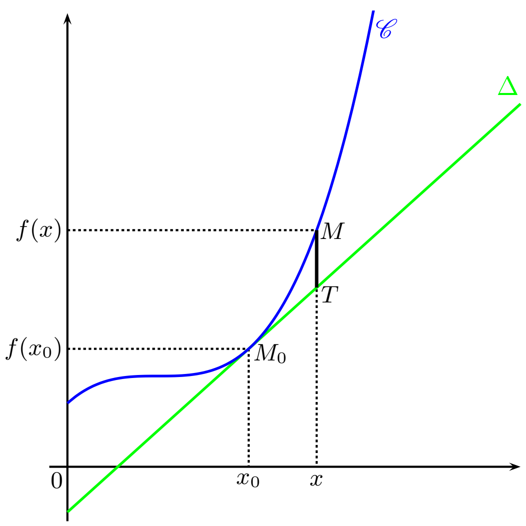
d'où :

$$\begin{aligned}\frac{x-\sin(x)}{x-\operatorname{Arctan}(x)} &\underset{0}{=} \frac{x-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{x-\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)}\\ &\underset{0}{=} \frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}\\ &\underset{0}{=} \frac{\frac{1}{6}+o(1)}{\frac{1}{3}+o(1)}\\ &\xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

SF92 Étudier localement la fonction

On considère une fonction f et on souhaite étudier la position du graphe $\mathscr{C}$ de f par rapport à sa tangente Δ en un point M_0 de coordonnées $\big(x_0, f(x_0)\big)$.

On note M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et T le point de Δ d'abscisse x.



On se place tout d'abord dans un cadre restrictif pour faciliter la lecture : on suppose que $f''(x_0) \neq 0$.

La formule de Taylor-Young appliquée à f en x_0 à l'ordre 2 s'écrit :

$$f(x) \underset{x_0}{=} f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + o\Big((x-x_0)^2\Big).$$

Puisque l'équation de Δ est $y = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0)$, on a :

$$y_{\mathrm{M}} - y_{\mathrm{T}} \underset{x_0}{=} \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + o\Big((x-x_0)^2\Big),$$

d'où compte tenu de l'hypothèse $f''(x_0) \neq 0$:

$$y_{\mathrm{M}} - y_{\mathrm{T}} \underset{x_0}{\sim} \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0).$$

Comme $\dfrac{(x-x_0)^2}{2} > 0$ pour tout $x \neq x_0$, on a :

– si $f''(x_0) > 0$ alors $y_M - y_T > 0$ et $\mathscr{C}$ est situé au-dessus de Δ ;
– si $f''(x_0) < 0$ alors $y_M - y_T < 0$ et $\mathscr{C}$ est situé au-dessous de Δ.

Dans le cas général, on note n le plus petit entier $k \geqslant 2$ tel que $f^{(k)}(x_0) \neq 0$. On aboutit alors à :

$$y_M - y_T \underset{x_0}{\sim} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

La distinction des cas est analogue au cas particulier précédent.

– Si n est pair alors $y_M - y_T$ est du signe de $f^{(n)}(x_0)$:
  — si $f^{(n)}(x_0) > 0$ alors $y_M - y_T > 0$ et $\mathscr{C}$ est situé au-dessus de Δ ;
  — si $f^{(n)}(x_0) < 0$ alors $y_M - y_T < 0$ et $\mathscr{C}$ est situé au-dessous de Δ.
– Si n est impair alors $y_M - y_T$ est du signe de $f^{(n)}(x_0)$ pour $x > x_0$ et du signe opposé pour $x < x_0$: la courbe $\mathscr{C}$ présente en M_0 un point d'inflexion.

Exemples

1 ▹ Déterminer la position du graphe de la fonction Arctan par rapport à sa tangente en 0.

On a vu que :

$$\mathrm{Arctan}(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

donc :

$$\mathrm{Arctan}(x) - x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{3}.$$

Cela signifie que la tangente au graphe de Arctan en 0 est la droite Δ d'équation $y = x$ et que le graphe est au-dessous de Δ pour $x > 0$ et au-dessus de Δ pour $x < 0$.

2 ▹ Déterminer la position du graphe de la fonction ln par rapport à sa tangente en 1.

On sait que :

$$\ln(1+h) \underset{0}{=} h - \frac{h^2}{2} + o(h^2),$$

donc :

$$\ln(x) \underset{1}{=} (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \left((x-1)^2\right),$$

ce qui donne :

$$\ln(x) - (x-1) \underset{1}{\sim} -\frac{(x-1)^2}{2}.$$

Cela signifie que la tangente au graphe de ln en 1 est la droite d'équation $y = x - 1$ et que le graphe est au-dessous de sa tangente au voisinage du point.

SF93 Déterminer les éventuelles asymptotes

Les développements limités peuvent être utiles pour déterminer la position d'une courbe par rapport à son asymptote lorsque x tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$).

Si la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$ alors il suffit de considérer un équivalent de $f(x) - (ax+b)$ en $+\infty$; quand x tend vers $+\infty$, le signe de $f(x) - (ax+b)$ est le même que celui de cet équivalent.

Exemple

Étudier l'éventuelle asymptote en $+\infty$ au graphe $\mathscr{C}$ de f définie par :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x}.$$

Pour $x > 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} f(x) &= x\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \\ &= x\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2} \\ &= x\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

On a :

$$(1+u)^{\frac{2}{3}} \underset{0}{=} 1 + \frac{2}{3}u + \frac{1}{2}\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)u^2 + o(u^2),$$

or $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc :

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{2}{3}\frac{1}{x} - \frac{1}{9}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

On obtient donc :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x + \frac{2}{3} - \frac{1}{9x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

ce qui signifie que la droite Δ d'équation $y = x + \dfrac{2}{3}$ est asymptote au graphe $\mathscr{C}$ de f quand x tend vers $+\infty$ et que $\mathscr{C}$ est situé au-dessous de Δ.

Quelques exercices d'application

Exercice C-26

Calculer les limites des fonctions suivantes, au point indiqué :

1. $x \mapsto \dfrac{x^3+3x^2-4}{x^3+5x^2+8x+4}$ en -2.

2. $x \mapsto \dfrac{\sin(3x)}{\sqrt{1-\cos(x)}}$ en 0.

3. $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1}-1}$ en 0.

4. $x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$ en 0.

5. $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^2}$ en 0.

6. $x \mapsto \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x-2}$ en $+\infty$.

Exercice C-27

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = x + 1 - \ln(x),$$

et la suite u définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \geqslant 2$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [2,3]$.

3. Montrer que, pour tout $x \in [2,3]$, on a :

$$|f(x) - \mathrm{e}| \leqslant \frac{2}{3}|x - \mathrm{e}|.$$

4. Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite ℓ.

5. Écrire un programme Python afin d'obtenir une valeur approchée de ℓ à 10^{-7} près.

Exercice C-28

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel noté u_n vérifiant la relation :

$$\int_n^{u_n} \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 1.$$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathrm{e}^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}.$$

3. Montrer que pour tout réel positif t, on a : $\sqrt{1+t} \leqslant 1 + \frac{1}{2}t$.

4. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\mathrm{e}^{-\sqrt{n}-\frac{u_n-n}{2\sqrt{n}}} \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{u_n}}.$$

5. Montrer que : $u_n - n \sim \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$.

Exercice C-29

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n - 1.$$

1. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n avec $0 < x_n < 1$.
2. Étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$.
3. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a : $x_n(1 - x_n^n) = 1 - x_n$.
4. Montrer que la suite $\left(x_n^n\right)_{n\geqslant 2}$ converge vers 0.
5. Étudier la convergence et la limite éventuelle de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$.

Exercice C-30

Étudier la convergence et la limite éventuelle de la suite u donnée par :

1. $u_n = \dfrac{\sin(n^2) - \cos(n)}{n}$;
2. $u_n = \dfrac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$;
3. $u_n = 3^n - n$;
4. $u_n = \dfrac{n^3 + 5n}{5n^3 + \cos(n) + \frac{1}{n^2}}$;
5. $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$;
6. $u_n = \sqrt{n + \cos(n)} - \sqrt{n}$;
7. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$;
8. $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2$;
9. $u_n = \dfrac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2}$ avec x réel fixé ;
10. $u_n = \left(\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\right)^{\frac{1}{n^3}}$;

Exercice C-31

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose : $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

1. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. En déduire la convergence de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$.
3. À l'aide d'un programme en Python, déterminer une valeur approchée de la somme de cette série.

Exercice C-32

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}.$$

On note $\mathscr{C}$ son graphe dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$.

1. Étudier les variations de f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point $\mathrm{A}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ puis déterminer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T.
3. Montrer que $f(x) + f(-x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis interpréter géométriquement.

Exercice C-33

La fonction $x \mapsto \dfrac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}$ a-t-elle une limite en $+\infty$?

Exercice C-34

Considérons une fonction continue $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ vérifiant :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) < x.$$

1. Montrer que $f(0) = 0$.

2. Considérons deux réels a et b avec $0 < a < b$. Montrer qu'il existe un réel M tel que :

$$0 \leqslant \mathrm{M} < 1 \ \text{ et } \ \forall\, x \in [a,b],\ f(x) \leqslant \mathrm{M}\,x.$$

Exercice C-35

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$

2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}.$

3. $h : [0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos\left(\sqrt{x}\right).$

Exercice C-36

Pour tout réel t de l'intervalle $[-1,1]$, on note Arcsin(t) l'unique réel de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus est égal à t.

Étudier la dérivabilité, et calculer la dérivée, de la fonction :

$$\mathrm{Arcsin} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ t \mapsto \mathrm{Arcsin}(t).$$

Exercice C-37

Soit P un polynôme à coefficients réels de degré $d \geqslant 2$.

1. Montrer que si les racines de P sont toutes réelles et simples alors il en est de même de celles de P′.

2. Montrer que si P est scindé alors P′ est scindé.

Exercice C-38

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et ℓ un réel tels que :

$$f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} \ell \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell.$$

Montrer que f' s'annule sur $\mathbb{R}$.

Exercice C-39

1. Déterminer les dérivées successives de la fonction ln.
2. Soit P un polynôme de degré n et f la fonction donnée sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \mathrm{P}(x) - \ln(x).$$

   Montrer que f s'annule au plus $n+1$ fois.
3. On considère les polynômes suivants (appelés *polynômes de Lagrange*) pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$:

$$\mathrm{L}_k(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} \frac{x-i}{k-i}.$$

   À l'aide de ces polynômes, trouver un exemple de polynôme P de degré n tel que la fonction f correspondante s'annule exactement $n+1$ fois.

Exercice C-40

Déterminer la limite de $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\tan^2(x)}$ quand x tend vers 0.

Exercice C-41

1. Soit f la fonction définie sur $]-1, 1[$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}}{1-x}$.

   Déterminer une équation de la tangente au graphe de f au point de coordonnées $(0, f(0))$ puis la position de la courbe par rapport à sa tangente.
2. Même question avec la fonction g définie pour $x < 1$ par $g(x) = \ln(1-x) - \cos(x)$.

Exercice C-42

1. Étudier la limite de la suite u donnée par : $u_n = (n+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - n$.
2. Étudier la limite de la suite v donnée par : $v_n = n\Big(\ln(2n+1) - \ln(n) - \ln(2)\Big) - \frac{1}{2}$.