

Exercice C-55

À tout polynôme P à coefficients réels, on associe le polynôme $Q = f(P)$ défini par :

$$Q(x) = (x-1)(x-2)P'(x) - 2xP(x).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$.
 2. Montrer que si P est un vecteur propre de f alors $\deg(P) = 2$.
 3. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de f .
1. Tout d'abord, f arrive bien dans $\mathbb{R}[x]$.
D'autre part, soit $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}[x]^2$ et μ un réel alors pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(\mu P_1 + P_2)(x) &= (x-1)(x-2)(\mu P_1 + P_2)'(x) - 2x(\mu P_1 + P_2)(x) \\ &= (x-1)(x-2)(\mu P_1' + P_2')(x) - (\mu 2xP_1(x) + 2xP_2(x)) \\ &= \mu((x-1)(x-2)P_1'(x) - 2xP_1(x)) + ((x-1)(x-2)P_2'(x) - 2xP_2(x)) \\ &= \mu f(P_1)(x) + f(P_2)(x) \\ &= (\mu f(P_1) + f(P_2))(x), \end{aligned}$$

donc f est linéaire.

Par conséquent, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit P un vecteur propre de f associé à une valeur propre λ , alors pour tout réel x :

$$(x-1)(x-2)P'(x) - 2xP(x) = \lambda P(x).$$

Tout d'abord, si P est constant (non nul) alors $(x-1)(x-2)P'(x) - 2xP(x)$ est de degré 1 et ne peut donc pas être égal à $\lambda P(x)$.

Notons $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_dx^d$ où les a_k sont des réels et $d \geq 1$ est le degré.

Le terme dominant de $(x-1)(x-2)P'(x)$ est da_dx^{d+1} .

Le terme dominant de $-2xP(x)$ est $-2a_dx^{d+1}$.

Comme λP est de degré d , il s'ensuit que :

$$da_d - 2a_d = 0,$$

or $a_d \neq 0$ (puisque d est le degré de P) donc $d = 2$.

Ainsi, si P est un vecteur propre de f alors P est de degré 2.

3. Considérons maintenant $P(x) = a + bx + cx^2$ avec a et b réels et c réel non nul. Pour tout λ complexe, la relation $f(P) = \lambda P$ s'écrit :

$$(x-1)(x-2)(b+2cx) - 2x(a+bx+cx^2) = \lambda(a+bx+cx^2),$$

soit en simplifiant :

$$2b + (4c - 3b - 2a)x + (-6c - b)x^2 = \lambda(a + bx + cx^2),$$

ce qui conduit au système :

$$(S_\lambda) : \begin{cases} -b - 6c = \lambda c \\ -2a - 3b + 4c = \lambda b \\ 2b = \lambda a \end{cases}$$

On résout ce système :

$$\begin{aligned} (S_\lambda) &\Leftrightarrow \begin{cases} b + (\lambda + 6)c = 0 \\ 2a + (3 + \lambda)b - 4c = 0 \\ \lambda a - 2b = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + (3 + \lambda)b - 4c = 0 \\ b + (\lambda + 6)c = 0 \\ \lambda a - 2b = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + (3 + \lambda)b - 4c = 0 \\ b + (\lambda + 6)c = 0 \\ (-2 - \frac{\lambda}{2}(3 + \lambda))b + 2\lambda c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + (3 + \lambda)b - 4c = 0 \\ b + (\lambda + 6)c = 0 \\ (-4 - \lambda(3 + \lambda))b + 4\lambda c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + (3 + \lambda)b - 4c = 0 \\ b + (\lambda + 6)c = 0 \\ (4 + 3\lambda + \lambda^2)b - 4\lambda c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + (3 + \lambda)b - 4c = 0 \\ b + (\lambda + 6)c = 0 \\ (-4\lambda - (\lambda + 6)(4 + 3\lambda + \lambda^2))c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + (3 + \lambda)b - 4c = 0 \\ b + (\lambda + 6)c = 0 \\ (\lambda + 2)(\lambda + 3)(\lambda + 4)c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que les valeurs propres sont -2 , -3 et -4 .

◇ Pour $\lambda = -2$, on a :

$$\begin{aligned} (S_{-2}) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b - 4c = 0 \\ b + 4c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4c \\ b = -4c \end{cases}, \end{aligned}$$

ce qui signifie que le sous-espace propre est la droite vectorielle engendrée par $P(x) = 4 - 4x + x^2$.

◇ Pour $\lambda = -3$, on a :

$$\begin{aligned} (S_{-3}) &\Longleftrightarrow \begin{cases} 2a - 4c = 0 \\ b + 3c = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} a = 2c \\ b = -3c \end{cases}, \end{aligned}$$

ce qui signifie que le sous-espace propre est la droite vectorielle engendrée par $Q(x) = 2 - 3x + x^2$.

◇ Pour $\lambda = -4$, on a :

$$\begin{aligned} (S_{\lambda}) &\Longleftrightarrow \begin{cases} 2a - b - 4c = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = -2c \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui signifie que le sous-espace propre est la droite vectorielle engendrée par $R(x) = 1 - 2x + x^2$.

Exercice C-56

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
2. Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$A^n = P \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

3. On considère les trois suites réelles x, y et z définies par $x_0 = 1, y_0 = -1, z_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - y_n - 2z_n \\ y_{n+1} = 4x_n - 3y_n - 2z_n \\ z_{n+1} = x_n - y_n - z_n \end{cases}.$$

Exprimer x_n, y_n et z_n en fonction de l'entier n .

1. On a, à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes :

$$\begin{aligned} \text{rg}(A - \lambda I_3) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 & -2 \\ 4 & -3 - \lambda & -2 \\ 1 & -1 & -1 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \dots = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 - \lambda \\ 0 & 1 - \lambda & 2 + 4\lambda \\ 0 & 0 & -(\lambda + 1)(\lambda + 2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où :

$$\text{rg}(A - \lambda I_3) = 3 \Longleftrightarrow 1 - \lambda \neq 0 \text{ et } -(\lambda + 1)(\lambda + 2) \neq 0$$

donc les valeurs propres de A sont $-2, -1$ et 1 .

► On a :

$$\text{rg}(A + 2I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

donc, par le théorème du rang, $\dim(E_{-2}(A)) = 1$.

On a :

$$\text{rg}(A + I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

donc, par le théorème du rang, $\dim(E_{-1}(A)) = 1$.

On a :

$$\text{rg}(A - I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = 2$$

donc, par le théorème du rang, $\dim(E_1(A)) = 1$.

On a :

$$\dim(E_{-2}(A)) + \dim(E_{-1}(A)) + \dim(E_1(A)) = 3 = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$$

donc A est diagonalisable.

► De plus, on a :

$$A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(A + 2I_3),$$

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(A + I_3)$$

et :

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 4 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(A - I_3).$$

Puisque ces trois vecteurs sont non nuls et puisque les noyaux sont tous de dimension 1, ils forment des bases des trois sous-espaces propres.

On écrit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a alors :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Notons $\mathcal{P}(n)$ l'assertion de l'énoncé et montrons-la par récurrence sur l'entier n .

Il est clair que $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque $A^0 = I_3$.

La question précédente donne également $\mathcal{P}(1)$.

Soit $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie alors, en utilisant cette hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \\ &= P \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-2)^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Le théorème de récurrence assure donc que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$ i.e. :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = P \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

3. Posons $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \geq 0$ de sorte que l'on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n.$$

Par une récurrence immédiate, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, X_n &= A^n X_0 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^{n+1} \\ 3(-1)^n \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-2)^{n+1} + 3(-1)^n \\ 2(-2)^{n+1} + 3(-1)^n \\ (-2)^{n+1} + 3(-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui signifie que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = (-2)^{n+1} + 3(-1)^n, \quad y_n = 2(-2)^{n+1} + 3(-1)^n, \quad z_n = (-2)^{n+1} + 3(-1)^n.$$

Exercice C-57

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 et $E = \mathbb{R}_n[x]$.

Pour tout P dans E et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(P)(x) = (x^2 + 1)P''(x) - 2xP'(x)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E et écrire la matrice de f dans la base canonique de E .
2. En déduire l'ensemble des valeurs propres de f .
3. Montrer que $\ker(f)$ est contenu dans $\mathbb{R}_3[x]$ puis en donner une base.
4. Déterminer $\ker(f + 2\text{id}_E)$.
5. L'application f est-elle diagonalisable ?

1. La linéarité provient de la linéarité de la dérivation ainsi que de la linéarité de la multiplication par un polynôme fixé.

De plus, si $P \in E$ alors $\deg(P) \leq n$ d'où :

$$\deg((x^2 + 1)P''(x)) \leq n \quad \text{et} \quad \deg(-2xP'(x)) \leq n,$$

ce qui implique que $f(P)$ est également de degré au plus n .

Donc f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

On a $f(1) = 0$, $f(x) = -2x$ et pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} f(x^k) &= (x^2 + 1)k(k-1)x^{k-2} - 2xkx^{k-1} \\ &= (k(k-1) - 2k)x^k + k(k-1)x^{k-2} \\ &= k(k-3)x^k + k(k-1)x^{k-2}. \end{aligned}$$

Notons que cette expression est également vraie pour les cas initiaux donc est vraie pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donc de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & & \\ & -2 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & n(n-1) \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & n(n-3) \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire la matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont égaux à $k(k-3)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et les coefficients «deux lignes au dessus» sont égaux à $k(k-1)$.

2. La matrice précédente étant triangulaire, les valeurs propres sont les éléments diagonaux c'est-à-dire tous les $k(k-3)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Ces derniers forment une suite dont les premiers termes sont 0, -2, -2, 0, 4, 10,... avec stricte croissance à partir de $k = 2$. Il y a donc au total $n-1$ valeurs propres distinctes :

$$\text{Sp}(f) = \{k(k-3) ; k \in \llbracket 2, n \rrbracket\}.$$

3. Si P est de degré $d \geq 4$, de terme dominant $a_d x^d$, alors, d'après la matrice, le terme dominant de $f(P)$ est $d(d-3)a_d x^d$ donc est non nul.

On en déduit que si P est dans $\ker(f)$ alors $\deg(P) \leq 3$.

Considérons maintenant P de degré au plus 3, on l'écrit :

$$P = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

avec a, b, c et d réels. Son image est déterminée par le produit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c \\ -2b + 6d \\ -2c \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $P \in \ker(f)$ si et seulement si l'on a $c = 0$ et $-2b + 6d = 0$, soit $c = 0$ et $b = 3d$, ce qui signifie que : $P = a + d(3x + x^3)$.

Par conséquent, $\ker(f)$ est le sous-espace de E engendré par 1 et $3x + x^3$.

4. On adopte un raisonnement analogue.

Si P est dans $\ker(f + 2\text{id}_E)$ alors on a $f(P) = -2P$.

Si P est de degré $d \geq 3$, de terme dominant $a_d x^d$, alors, d'après la matrice, l'égalité des termes dominants donne :

$$d(d-3)a_d x^d = -2a_d x^d,$$

d'où :

$$d(d-3) = -2,$$

soit $d^2 - 3d + 2 = 0$ mais les racines de ce polynôme sont 1 et -2 donc la relation est impossible.

On en déduit que P est de degré au plus 2, on l'écrit :

$$P = a + bx + cx^2,$$

avec a, b et c réels. Son image est déterminée par le produit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c \\ -2b \\ -2c \end{pmatrix}.$$

La relation $f(P) = -2P$ se traduit donc par les égalités $2c = -2a$, $-2b = -2b$ et $-2c = -2c$, soit seulement l'égalité $a = -c$.

Ainsi, $P \in \ker(f + 2\text{id}_E)$ si et seulement si l'on a $P = a(1 - x^2) + bx$.

Par conséquent, $\ker(f + 2\text{id}_E)$ est le sous-espace de E engendré par $1 - x^2$ et x .

5. Les sous-espaces propres associés à 0 et -2 sont tous deux de dimension 2.

Les $n - 3$ autres valeurs propres ont toutes un sous-espace propre de dimension au moins 1.

La somme de toutes ces dimensions est donc au moins égale à $2 + 2 + n - 3 = n + 1$.

Comme E est de dimension $n + 1$, ces deux dimensions sont donc égales.

Donc f est diagonalisable.

Exercice C-58

On considère la matrice $C \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ définie par :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$ la base canonique de $\mathbb{R}^7$ et c l'endomorphisme de $\mathbb{R}^7$ dont la matrice dans la base canonique est C . Selon l'usage, on identifie les matrices colonnes (à 7 lignes à coefficients réels) à des vecteurs de $\mathbb{R}^7$. On note $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$ les vecteurs colonnes de la matrice C .

- Déterminer une base du noyau et une base de l'image de c , ainsi que le rang de c .
- On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^7$ engendré par les trois premiers vecteurs colonnes f_1, f_2, f_3 de la matrice C .
 - Montrer que F est stable par c .
 - Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de F et déterminer la matrice Φ dans cette base de l'endomorphisme φ de F induit par c .
 - Pourquoi 1 est-il valeur propre de Φ ?
 - Montrer que Φ admet 3 valeurs propres réelles distinctes que l'on déterminera.
 - La matrice Φ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
- Déduire des questions précédentes le spectre de C et les dimensions des sous-espaces propres associés. Montrer que C est diagonalisable dans $\mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ et déterminer une matrice diagonale semblable à C .

1. Notons Γ_i la i -ème colonne de C , pour tout $i \in \llbracket 1, 7 \rrbracket$.

Les trois premières colonnes sont indépendantes, $\Gamma_3 = \Gamma_4$, $\Gamma_2 = \Gamma_5$ et les deux dernières colonnes sont nulles donc $\boxed{\text{rg}(C) = 3}$.

On a $\dim(\text{Im}(c)) = 3$ et le théorème du rang donne $\dim(\ker(c)) = 4$.

Les relations sur les colonnes précisées ci-dessus montrent que $e_3 - e_4$, $e_2 - e_5$, e_6 et e_7 sont dans le noyau. Il est clair que ces quatre vecteurs sont linéairement indépendants or le noyau est de dimension 4, on a donc une base de ce noyau et :

$$\dim(\ker(c)) = \text{Vect}(e_3 - e_4, e_2 - e_5, e_6, e_7).$$

Les trois premières colonnes sont indépendantes et l'image de c est de dimension 3 donc :

$$\text{Im}(c) = \text{Vect}(c(e_1), c(e_2), c(e_3)) \quad i.e. \quad \text{Im}(c) = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$$

et il s'agit d'une base de $\text{Im}(c)$.

2. **a.** Puisque $F = \text{Im}(c)$, on a $c(\mathbb{R}^7) = F$ et *a fortiori* $c(F) \subset F$.

b. La liberté de (f_1, f_2, f_3) a été admise dans la première question car jugée évidente. En effet, le «premier» bloc 3×3 de la matrice C montre que :

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \quad \text{donc} \quad \text{rg}(f_1, f_2, f_3) = 3$$

et il s'ensuit que (f_1, f_2, f_3) est une base de F .

On a :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad c(f_1) = 2f_3 + f_2 \quad i.e. \quad \varphi(f_1) = 2f_3 + f_2,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad c(f_2) = f_2 \quad i.e. \quad \varphi(f_2) = f_2,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad c(f_3) = f_1 \quad i.e. \quad \varphi(f_3) = f_1,$$

donc :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi(f_1) & \varphi(f_2) & \varphi(f_3) \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_2 \end{matrix}$$

c. On a $\varphi(f_2) = f_2$ donc 1 est une valeur propre de Φ .

d. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \text{rg}(\Phi - \lambda I_3) &= \text{rg} \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1-\frac{1}{2}\lambda^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc :

$$\text{rg}(\Phi - \lambda I_3) < 3 \iff \lambda \in \{1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

ce qui signifie que Φ admet 3 valeurs propres réelles distinctes : $1, -\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

e. La matrice Φ est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admettant trois valeurs propres distinctes donc Φ est diagonalisable (les trois sous-espaces propres sont de dimension 1 donc la somme des dimensions est bien égale à 3).

3. Puisque φ est la restriction de c à F , on en déduit que $1, -\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ sont également des valeurs propres de c .

De plus, $\ker(c)$ est de dimension 4 donc 0 est une valeur propre de c et le sous-espace propre associé est de dimension 4.

Puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à 7,

$$\underbrace{\dim(E_1)}_{\geq 1} + \underbrace{\dim(E_{-\sqrt{2}})}_{\geq 1} + \underbrace{\dim(E_{\sqrt{2}})}_{\geq 1} + \underbrace{\dim(E_0)}_{=4} \leq \underbrace{\dim(\mathbb{R}^7)}_{=7},$$

on en déduit que les sous-espaces propres associés aux valeurs $1, -\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ sont tous de dimension 1 et :

$$\dim(E_1) + \dim(E_{-\sqrt{2}}) + \dim(E_{\sqrt{2}}) + \dim(E_0) = \dim(\mathbb{R}^7)$$

donc C est diagonalisable dans $\mathcal{M}_7(\mathbb{R})$.

Une matrice diagonale semblable à C est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$