CHAPITRE

III

RÉDUCTION

Sommaire

A - Valeurs propres et vecteurs propres

A.1 - Définitions et caractérisations équivalentes

Dans tout ce qui suit E désigne un espace vectoriel de dimension finie n.

Proposition et définition III-1

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ de E.

On considère un réel λ.

1. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- ***i.*** $\mathrm{A}-\lambda \mathrm{I}_n$ non inversible ;
- ***ii.*** $\mathrm{rg}(\mathrm{A}-\lambda \mathrm{I}_n) < n$;
- ***iii.*** $\ker(\mathrm{A}-\lambda \mathrm{I}_n) \neq \{0_{n,1}\}$;
- ***iv.*** $\dim\Big(\ker(\mathrm{A}-\lambda \mathrm{I}_n)\Big) \geqslant 1$;
- ***v.*** $f-\lambda \mathrm{id}_\mathrm{E}$ non bijectif ;
- ***vi.*** $f-\lambda \mathrm{id}_\mathrm{E}$ non injectif ;
- ***vii.*** $f-\lambda \mathrm{id}_\mathrm{E}$ non surjectif ;
- ***viii.*** $\ker(f-\lambda \mathrm{id}_\mathrm{E}) \neq \{0_\mathrm{E}\}$;
- ***ix.*** $\dim\Big(\ker(f-\lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})\Big) \geqslant 1$;
- ***x.*** il existe $x \in \mathrm{E}$, avec $x \neq 0_\mathrm{E}$, tel que $f(x)=\lambda x$;
- ***xi.*** il existe $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, avec $\mathrm{X} \neq 0_{n,1}$, tel que $\mathrm{AX}=\lambda \mathrm{X}$.

2. On dit que λ est une ***valeur propre*** de f lorsqu'il existe un vecteur non nul x de E tel que $f(x)=\lambda x$.

Un tel vecteur x est alors appelé un ***vecteur propre*** de f associé à la valeur propre λ.

Le sous-espace vectoriel $\mathrm{E}_\lambda(f)=\ker(f-\lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})$ est appelé le ***sous-espace propre*** de f associé à la valeur propre λ.

L'ensemble des valeurs propres de f est appelé le ***spectre*** de f et est noté $\mathrm{Sp}(f)$.

3. On dit que λ est une ***valeur propre*** de A lorsqu'il existe $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $\mathrm{AX}=\lambda \mathrm{X}$.

Un tel vecteur X est alors appelé un ***vecteur propre*** de A associé à la valeur propre λ.

Le sous-espace vectoriel $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})=\ker(\mathrm{A}-\lambda \mathrm{I}_n)$ est appelé le ***sous-espace propre*** de A associé à la valeur propre λ.

L'ensemble des valeurs propres de A est appelé le ***spectre*** de A et est noté $\mathrm{Sp}(\mathrm{A})$.

Démonstration

Notons tout d'abord que $f-\lambda \mathrm{id}_\mathrm{E}$ est un endomorphisme en dimension finie donc :

$$\textbf{\textit{v.}} \iff \textbf{\textit{vi.}} \iff \textbf{\textit{vii.}}$$

Le théorème du rang (et le fait qu'une dimension soit un entier) donnent :

$$\textbf{\textit{i.}} \iff \textbf{\textit{ii.}} \iff \textbf{\textit{iii.}} \iff \textbf{\textit{iv.}} \qquad \text{et} \qquad \textbf{\textit{v.}} \iff \textbf{\textit{viii.}} \iff \textbf{\textit{ix.}}$$

Puisque A est la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ de E, la matrice de $f-\lambda\,\mathrm{id}_E$ dans cette base est $A-\lambda I_n$ d'où :

$$f-\lambda\,\mathrm{id}_E \text{ non bijectif} \iff A-\lambda I_n \text{ non inversible}$$

et l'on a l'équivalence entre ***i*** et ***v***.

Enfin, on a :

$$\begin{aligned}\ker(f-\lambda\,\mathrm{id}_E) &= \{x\in E\ ;\ (f-\lambda\,\mathrm{id}_E)(x)=0_E\}\\ &= \{x\in E\ ;\ f(x)-\lambda x=0_E\}\\ &= \{x\in E\ ;\ f(x)=\lambda x\}\end{aligned}$$

ce qui donne immédiatement l'équivalence entre ***viii*** et ***x***.

De même :

$$\begin{aligned}\ker(A-\lambda I_n) &= \{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ ;\ (A-\lambda I_n)X=0_{n,1}\}\\ &= \{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ ;\ AX-\lambda X=0_{n,1}\}\\ &= \{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ ;\ AX=\lambda X\}\end{aligned}$$

ce qui donne l'équivalence entre ***iii*** et ***xi***.

Exemples

1 ▹ Notons :

$$A=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&-2&0\\-1&-2&0\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\ \text{ et }\ Z=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$$

de sorte que :

$$AX=0\cdot X,\quad AY=Y\quad \text{et}\quad AZ=-2Z.$$

Comme X, Y et Z sont des matrices colonnes non nulles, 0, 1 et -2 sont valeurs propres de A.

2 ▹ Soit $u\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$.

En notant C_1, C_2 et C_3 les trois colonnes, on remarque que $2C_1-C_2$ et $3C_1-C3$ sont nulles, et la matrice n'est pas nulle, donc $\mathrm{rg}(A)=1$.

Le fait que $\mathrm{rg}(u)<3$ montre que 0 est une valeur propre de u. De plus, $E_0=\ker(u)$ est de dimension 2 et les relations sur les colonnes constatées ci-dessus montrent que : $\ker(u)=\mathrm{Vect}\big((2,-1,0),(3,0,-1)\big)$.

D'autre part, on remarque que :

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(A-6I_3) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}-5&2&3\\1&-4&3\\1&2&-3\end{pmatrix}\\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}0&2&3\\0&-4&3\\0&2&-3\end{pmatrix}\ (\text{par } C_1\leftarrow C_1+C_2+C_3)\\ &= 2.\end{aligned}$$

On en déduit que 6 est une valeur propre de u. De plus, $E_6=\ker(u-6\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ est de dimension 1 et la relation sur les colonnes mise en évidence ci-dessus montre que : $\ker(u-6\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})=\mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$.

3 ▹ Posons $\mathbf{u}=(1,0,-2)$, $\mathbf{v}=(0,0,1)$, $\mathbf{w}=(1,1,-2)$ et :

$$\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,(x,y,z)\mapsto(x+2y,3y,2x-4y+2z).$$

On a $\varphi(\mathbf{u})=\mathbf{u}$, $\varphi(\mathbf{v})=2\mathbf{v}$ et $\varphi(\mathbf{w})=3\mathbf{w}$.

Comme **u**, **v** et **w** sont non nuls, 1, 2 et 3 sont trois valeurs propres de φ.

On a donc $\{1;2;3\} \subset \mathrm{Sp}(\varphi)$.

Remarques

1 ▹ Bien entendu les notions coïncident : dire que λ une valeur propre de f et que x est un vecteur propre associé revient à dire (en notant A une matrice représentant f) que λ est une valeur propre de A et que la matrice de x est un vecteur propre associé.

2 ▹ Un endomorphisme de E, ou une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, n'admet pas nécessairement de valeur propre.

3 ▹ Notons que 0 est une valeur propre de f si et seulement si f n'est pas bijective et $E_0(f) = \ker(f)$.

De même, 0 est une valeur propre de A si et seulement si A n'est pas inversible et $E_0(A) = \ker(A)$.

4 ▹ Si λ est une valeur propre de f alors : $1 \leqslant \dim(E_\lambda(f)) \leqslant n$.

Si λ est une valeur propre de A alors : $1 \leqslant \dim(E_\lambda(A)) \leqslant n$.

5 ▹ Si A est une matrice triangulaire alors ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

Notons que ce n'est pas vrai si la matrice n'est pas triangulaire. Par exemple, on a vu que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ admettait 0 et 6 pour valeurs propres.

6 ▹ Si A est une matrice diagonale, alors les valeurs propres de A sont exactement les coefficients diagonaux de A et pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, la dimension de $E_\lambda(A)$ est égale au nombre de fois où λ apparait sur la diagonale de A.

Ce n'est pas vrai dans le cas d'une matrice triangulaire. Par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'admet que 1 pour valeur propre mais on vérifie aisément que $E_1(A)$ est de dimension 1.

En informatique –

Voici un exemple d'utilisation de python pour obtenir une approximation de valeurs propres et vecteurs propres.

```
>>> import numpy as np
>>> import numpy.linalg as al
>>> A = np.array([[1, 3, 0], [0, -2, 0], [-1, -2, 0]])
>>> al.eigvals(A)
array([ 0.,  1., -2.])
>>> al.eig(A)
EigResult(eigenvalues=array([ 0.,  1., -2.]), eigenvectors=array([[ 0.        ,
    0.70710678, -0.66666667],
       [ 0.        ,  0.        ,  0.66666667],
       [ 1.        , -0.70710678,  0.33333333]]))
```

Exercice C-43

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

Montrer que si A et B sont semblables alors $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B)$ et les sous-espaces propres de A et B ont même dimension.

Exercice C-44

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Y a-t-il un lien entre le fait que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et le fait que $\lambda^2 \in \mathrm{Sp}(A^2)$?

2. Y a-t-il un lien entre les valeurs propres de A et celles de ${}^tA$?

3. Si A est inversible, y a-t-il un lien entre le fait que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et le fait que $\lambda^{-1} \in \mathrm{Sp}(A^{-1})$?

Exercice C-45

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la somme sur chaque ligne soit identique :

$$\exists s \in \mathbb{R} \;/\; \forall i \in [\![1, n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} A[i, j] = s.$$

Montrer que s est une valeur propre de A.

Exercice C-46

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathbf{u}$ un vecteur non nul de E.

1. Montrer que $\mathbf{u}$ est un vecteur propre de f si et seulement si la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(\mathbf{u})$ est stable par f.

2. Est-ce qu'un sous-espace propre de f est stable par f ?

B - Éléments propres et polynômes

B.1 - Rappels sur les polynômes d'endomorphismes et de matrices

▶ Si A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors on peut définir les ***puissances*** de A en posant :

$$\mathrm{A}^0 = \mathrm{I}_n \quad \text{et : } \forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{A}^{k+1} = \mathrm{A} \times \mathrm{A}^k \left(= \mathrm{A}^k \times \mathrm{A}\right).$$

Exemples

1 ▹ Si $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ alors : $\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{A}^3 = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$, …

2 ▹ Si $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors : $\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{A}^3 = 0_3,\ \mathrm{A}^4 = 0_3,\ \ldots$

On montre aisément par récurrence que lorsque D est une matrice diagonale, ses puissances s'obtiennent en élevant les coefficients diagonaux à cette puissance :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, un ***polynôme de matrice*** est une expression de la forme P(A) où $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[x]$ c'est-à-dire une expression de la forme :

$$a_p \mathrm{A}^p + a_{p-1} \mathrm{A}^{p-1} + \cdots a_1 \mathrm{A} + a_0 \mathrm{I}_n$$

où les a_j sont des réels et $p \in \mathbb{N}$.

On dit qu'un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[x]$ est un ***polynôme annulateur*** de A lorsque P(A) est la matrice nulle c'est-à-dire, en notant $\mathrm{P}(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{p} a_j x^j$, lorsque :

$$a_p \mathrm{A}^p + a_{p-1} \mathrm{A}^{p-1} + \cdots a_1 \mathrm{A} + a_0 \mathrm{I}_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.$$

Exemples

1 ▹ Si $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P}(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$ alors :

2 ▹ Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, on a :

Remarque

On démontre que pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P,Q) \in \mathbb{R}[x]^2$,

$$(\lambda P)(A) = \lambda P(A) \quad \text{et} \quad (P+Q)(A) = P(A) + Q(A).$$

On dispose aussi de la propriété de commutativité :

$$(PQ)(A) = P(\ A)Q(\ A) = Q(\ A)P(\ A) = (QP)(A).$$

▶ De façon analogue, pour un endomorphisme f de E, les applications $f^2 = f \circ f, f^3 = f \circ f \circ f \ldots$ sont parfaitement définies et linéaires. Les puissances de f sont les applications :

$$f^0 = \mathrm{id}_E \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ compositions}}.$$

Plus généralement, un ***polynôme d'endomorphisme*** est une expression de la forme $P(f)$ où $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{R}[x]$ c'est-à-dire une expression de la forme :

$$a_p f^p + a_{p-1} f^{p-1} + \cdots a_1 f + a_0 \,\mathrm{id}_E$$

où les a_j sont des réels et $p \in \mathbb{N}$.

On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ est un ***polynôme annulateur*** de f lorsque $P(f)$ est l'endomorphisme nul c'est-à-dire, en notant $P(x) = \sum_{j=0}^{p} a_j x^j$, lorsque :

$$a_p f^p + a_{p-1} f^{p-1} + \cdots a_1 f + a_0 \,\mathrm{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Remarques

1 ▹ De même que pour les matrices, on a les propriétés suivantes :

$$(\lambda P)(f) = \lambda P(f), \quad (P+Q)(f) = P(f) + Q(f) \quad \text{et} \quad (PQ)(f) = P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f) = (QP)(f).$$

2 ▹ Si $\mathcal{B}$ est une base de E alors pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^k = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^k\right).$$

Plus généralement, pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$:

$$P\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P(f)).$$

En effet, il suffit de raisonner par récurrence sur k à partir de la formule :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^{k+1}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^k \circ f\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^k\right) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$$

puis, pour le second point, d'exploiter la linéarité de l'application $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Exercice C-47

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

En étudiant la famille $\left(I_n, A, A^2, \ldots, A^p\right)$ pour un entier p bien choisi, montrer que A admet un polynôme annulateur.

Exercice C-48

Donner un polynôme annulateur à l'endomorphisme $\varphi : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x], P \mapsto P'$.

Exercice C-49

Soit A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que tout polynôme annulateur de A est annulateur de B.

B.2 - Polynômes et valeurs propres

Proposition III-2

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $Q \in \mathbb{R}[x]$. Si $\mathbf{u}$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ alors :

$$Q(f)(\mathbf{u}) = Q(\lambda).\mathbf{u}.$$

Démonstration

▹ Montrons par récurrence sur l'entier $k \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}(k)$: «$f^k(\mathbf{u}) = \lambda^k \mathbf{u}$».

▹ Supposons maintenant que $Q(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$, alors :

Corollaire III-3

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $P \in \mathbb{R}[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si λ est valeur propre de f et si P est un polynôme annulateur de f alors λ est une racine de P.

Démonstration

Exemple

Supposons que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ soit nilpotent *i.e.* il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Le polynôme donné par $Q(x) = x^p$ est donc un polynôme annulateur de φ or il n'admet que 0 pour racine donc la seule valeur propre éventuelle de φ est 0.

Par ailleurs, la relation $\varphi^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ montre que φ n'est pas bijective donc 0 est valeur propre de φ.

Donc $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{0\}$.

Remarques

1 ▹ De façon analogue pour les matrices : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $Q \in \mathbb{R}[x]$ et X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, alors :

$$Q(A)X = Q(\lambda)X.$$

Si, de plus, Q est un polynôme annulateur de A alors λ est une racine de Q.

2 ▹ La réciproque est fausse : une racine d'un polynôme annulateur n'est pas nécessairement une valeur propre.

En effet, si P est un polynôme annulateur de f et si α n'est pas valeur propre de f alors le polynôme d'expression $Q(x) = (x - \alpha)P(x)$ est également un polynôme annulateur de f.

3 ▹ Le nombre de valeurs propres d'un endomorphisme de dimension finie est fini.

En effet, on a vu qu'il existait toujours un polynôme annulateur P non nul donc l'endomorphisme admet au plus deg(P) valeurs propres.

Exercice C-50

On considère $n \geqslant 2$ et $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{M} \mapsto {}^t\mathrm{M}$.

Déterminer un polynôme annulateur de φ de degré 2 et en déduire les valeurs propres de φ.

Théorème III-4

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ dont on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres deux à deux distinctes.

Alors les sous-espaces propres $\mathrm{E}_{\lambda_1}(f), \ldots, \mathrm{E}_{\lambda_p}(f)$ sont en somme directe.

Démonstration

Corollaire III-5

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ dont on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres deux à deux distinctes, alors :

$$\sum_{i=1}^{p} \dim\left(\mathrm{E}_{\lambda_i}(f)\right) \leqslant \dim(\mathrm{E}).$$

Démonstration

Corollaire III-6

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ dont on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres deux à deux distinctes et $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p$ des vecteurs propres associés, alors $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)$ est une famille libre.

Démonstration

Corollaire III-7

Le nombre de valeurs propres d'un endomorphisme de E est inférieur ou égal à $\dim(\mathrm{E})$.

Démonstration

B.3 - Quelques cas particuliers importants

B.3.a - Les homothéties

On rappelle que l'*homothétie* de E de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est l'application $\lambda\,\mathrm{id}_E$ c'est-à-dire :

$$E \to E, \mathbf{u} \mapsto \lambda.\mathbf{u}.$$

Un polynôme annulateur est $P(x) = x - \lambda$.

Tout vecteur non nul de E est vecteur propre pour la valeur propre λ.

Notons la réciproque vue en exercice : si $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ est non nulle et si tout vecteur non nul de E est un vecteur propre de φ alors φ est une homothétie.

B.3.b - Les projecteurs

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur, on note $F = \mathrm{Im}(p)$ et $G = \ker(p)$ (de sorte que p soit le projecteur sur F parallèlement sur G).

On suppose en outre que p n'est ni $0_{\mathcal{L}(E)}$, ni id_E (donc F et G ne sont pas $\{0_E\}$).

Tout d'abord, on a $p \circ p = p$ donc $Q(x) = x^2 - x$ est un polynôme annulateur de p donc les éventuelles valeurs propres de p ne peuvent être que 0 et 1.

Réciproquement, pour tout $\mathbf{u} \in F$ non nul, on a $p(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ donc 1 est valeur propre.

De plus, pour tout $\mathbf{u} \in G$ non nul, on a $p(\mathbf{u}) = 0_E$ donc 0 est valeur propre.

Donc les valeurs propres de p sont 0 et 1.

Notons que l'on a $F = E_1(p)$ et $G = E_0(p)$.

De plus, puisque $E = F \oplus G$, on a $E = E_1(p) \oplus E_0(p)$.

Exercice C-51

Quelle est la matrice d'un projecteur p dans une base adaptée à la somme directe $E = E_1(p) \oplus E_0(p)$?

Exercice C-52

Soit $a \in \mathbb{R}_+$, on considère les applications :

$$p_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto \frac{1}{1+a^2}\left(x + ay, ax + a^2 y\right)$$

et

$$q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto \frac{1}{2}(x+y, x+y).$$

1. Justifier que les applications p_a et q sont des projecteurs.
2. Vérifier que $(1,a)$ est vecteur propre de $p_a \circ q$.
3. En déduire l'unique valeur a pour laquelle $p_a \circ q$ soit un projecteur.

B.3.c - Les symétries

Soit $s \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ une symétrie, on note $\mathrm{F} = \ker(s - \mathrm{id}_\mathrm{E})$ et $\mathrm{G} = \ker(s + \mathrm{id}_\mathrm{E})$ (de sorte que s soit la symétrie par rapport à F parallèlement à G).

On suppose en outre que s n'est ni id_E, ni $-\mathrm{id}_\mathrm{E}$ (donc F et G ne sont pas $\{0_\mathrm{E}\}$).

Tout d'abord, on a $s \circ s = \mathrm{id}_\mathrm{E}$ donc $\mathrm{Q}(x) = x^2 - 1$ est un polynôme annulateur de s donc les éventuelles valeurs propres de s ne peuvent être que -1 et 1.

Réciproquement, pour tout $\mathbf{u} \in \mathrm{F}$ non nul, on a $s(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ donc 1 est valeur propre.

De plus, pour tout $\mathbf{u} \in \mathrm{G}$ non nul, on a $s(\mathbf{u}) = -\mathbf{u}$ donc -1 est valeur propre.

Donc les valeurs propres de s sont -1 et 1.

Notons que l'on a $\mathrm{F} = \mathrm{E}_1(s)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{E}_{-1}(s)$.

De plus, puisque $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, on a $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1(s) \oplus \mathrm{E}_{-1}(s)$.

Exercice C-53

Quelle est la matrice d'une symétrie s dans une base adaptée à la somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1(s) \oplus \mathrm{E}_{-1}(s)$?

C - Diagonalisation

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Tout d'abord, considérons le cas où E admet une base $\mathcal{B}' = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ constituée par des vecteurs propres de f. Écrivons :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(\mathbf{x}_i) = \lambda_i \mathbf{x}_i,$$

quitte à ce que certains λ_i et λ_j soient égaux.

Dans ces conditions, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Définition III-8

On dit que f est ***diagonalisable*** lorsque E admet une base formée de vecteurs propres de f.

En notant P la matrice de passage de la base initiale $\mathcal{B}$ à cette nouvelle base $\mathcal{B}'$, on obtient la relation matricielle :

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Définition III-9

Une matrice carrée A est dite ***diagonalisable*** lorsqu'il existe une matrice inversible P telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P}$ soit une matrice diagonale.

Remarques

1 ▹ L'endomorphisme f est diagonalisable lorsqu'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

2 ▹ Si A est la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ de E alors on a l'équivalence :

$$f \text{ diagonalisable} \iff \mathrm{A} \text{ diagonalisable}.$$

Exemples

1 ▹ Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\mathbf{e}_1 = (2, -1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (3, 0, -1)$ et $\mathbf{e}_3 = (1, 1, 1)$ sont des vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres 0, 0 et 6 :

$$f(\mathbf{e}_1) = 0_{\mathbb{R}^3}\ ,\ \ f(\mathbf{e}_2) = 0_{\mathbb{R}^3}\ \text{ et }\ f(\mathbf{e}_3) = 6\mathbf{e}_3.$$

Ces vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$, par exemple puisque :

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{6} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \mathrm{rg}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 3.$$

Dans cette base, la matrice de f est : $\mathrm{D} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(\mathbf{e}_1) & f(\mathbf{e}_2) & f(\mathbf{e}_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{array} \end{array}$.

En notant $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$.

Vérifions numériquement :

```
>>> import numpy as np
>>> import numpy.linalg as al
>>> A = np.array([[1, 2, 3], [1, 2, 3], [1, 2, 3]])
>>> P = np.array([[2, 3, 1], [-1, 0, 1], [0, -1, 1]])
>>> al.inv(P)
array([[ 0.16666667, -0.66666667,  0.5       ],
       [ 0.16666667,  0.33333333, -0.5       ],
       [ 0.16666667,  0.33333333,  0.5       ]])
>>> np.dot(al.inv(P), np.dot(A, P))
array([[0., 0., 0.],
       [0., 0., 0.],
       [0., 0., 6.]])
```

2 ▹ Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ canoniquement associé à la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Soit λ un réel, alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_2) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2-\lambda & 3-\lambda \end{pmatrix} \quad (\text{par } \mathrm{C}_1 \leftarrow \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2) \\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} \quad (\text{par } \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1). \end{aligned}$$

La matrice $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_2$ est de rang 2 si et seulement si λ est différent de 2 et 4 donc f admet deux valeurs propres : 2 et 4.

On a $\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ donc : $\ker(f - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \mathrm{Vect}\big((1,1)\big)$.

On a $\mathrm{A} - 4\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ donc : $\ker(f - 4\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \mathrm{Vect}\big((1,-1)\big)$.

Posons $\mathbf{e}_1 = (1,1)$ et $\mathbf{e}_2 = (1,-1)$ alors $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et :

$$f(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_1 \qquad \text{et} \qquad f(\mathbf{e}_2) = 4\mathbf{e}_2.$$

L'endomorphisme f est diagonalisable et, on notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, on a :

$$P^{-1}AP = \begin{array}{cc} f(\mathbf{e}_1) & f(\mathbf{e}_2) \\ \end{array} \atop \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{array} .$$

Là encore, vérifions numériquement :

```
>>> A = np.array([[3, -1], [-1, 3]])
>>> P = np.array([[1, 1], [1, -1]])
>>> np.round(al.inv(P) @ A @ P)
array([[2., 0.],
       [0., 4.]])
```

3 ▹ La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

En effet, supposons par l'absude qu'elle le soit alors il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. Comme A est triangulaire, ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux donc sont toutes égales à 1. On a donc :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

ce qui conduit à $A = P I_2 P^{-1} = I_2$ ce qui n'est pas le cas. Donc A n'est pas diagonalisable.

Théorème III-10

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

i. f est diagonalisable ;

ii. E est la somme directe des sous-espaces propres de f *i.e.* $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} E_\lambda(f)$;

iii. $\dim(E) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f))$.

Démonstration

▹ Tout d'abord, puisque les sous-espaces propres de f sont en somme directe, on a l'équivalence entre ***ii*** et ***iii***.

▹ Supposons ***i*** vraie et considérons une base $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres de f. Pour chaque $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, on note $\mathcal{B}_\lambda$ la famille formée des vecteurs de $\mathcal{B}$ qui sont dans E_λ alors :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f),\ \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_\lambda) \subset E_\lambda$$

donc, puisque la concaténation des $\mathcal{B}_\lambda$ est $\mathcal{B}$ qui est une base de E :

$$E = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_\lambda) \subset \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} E_\lambda \subset E$$

donc $E = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} E_\lambda$. On a donc ***ii***.

▹ Supposons ***ii*** vraie. Pour chaque $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, on considère une base $\mathcal{B}_\lambda$ de E_λ, ce sont des vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ.

Puisque $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} E_\lambda(f)$, la concaténation $\mathcal{B}$ des $\mathcal{B}_\lambda$ est une base de E. Il s'agit donc d'une base de E formée de vecteurs propres de f donc f est diagonalisable et l'on a ***i***.

Exemple

Considérons l'application linéaire $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), M \mapsto {}^tM$.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors :

$$f(M) = M \iff M = {}^tM$$

donc 1 est valeur propre de f et E_1 correspond au s.e.v. des matrices symétriques :

$$E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\right).$$

On vérifie aisément que ces matrices forment une base de E_1 donc $\dim(E_1) = 6$.

De même, on a :

$$f(M) = -M \iff M = -{}^tM$$

donc -1 est valeur propre de f et E_{-1} correspond au s.e.v. des matrices antisymétriques :

$$E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\right).$$

On vérifie aisément que ces matrices forment une base de E_{-1} donc $\dim(E_{-1}) = 3$.

On a :

$$\dim(E_1) + \dim(E_{-1}) = 9 = \dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$$

donc f est diagonalisable.

Remarque

Dans la «version matricielle», le théorème s'énonce ainsi : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a équivalence entre

i. A est diagonalisable ;

ii. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est la somme directe des sous-espaces propres de A *i.e.* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} E_\lambda(A)$;

iii. $n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A))$.

Corollaire III-11

Si $n = \dim(\mathrm{E})$ et si f admet n valeurs propres distinctes alors f est diagonalisable.

Notons que la réciproque est fausse puisque, par exemple, I_n est diagonale et n'a qu'une seule valeur propre.

Démonstration

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de f, alors :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \dim(\mathrm{E}_{\lambda_i}(f)) \geqslant 1$$

donc :

$$n \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim(\mathrm{E}_{\lambda_i}(f)) = \dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{E}_{\lambda_i}(f)\right) \leqslant \dim(\mathrm{E}) = n$$

donc ces inégalités sont des égalités et l'on a :

$$\dim(\mathrm{E}) = \sum_{i=1}^{n} \dim(\mathrm{E}_{\lambda_i}(f))$$

donc f est diagonalisable.

Exemple

La matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

En effet, A est dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et admet 4 valeurs propres distinctes.

D - Problématiques et savoir-faire fondamentaux

■ Comment déterminer des valeurs propres et des vecteurs propres ?

SF94 Étudier un rang pour déterminer les valeurs propres

Un réel λ est une valeur propre de f lorsque $\mathrm{rg}(f-\lambda\,\mathrm{id}_E) < n$; de même, λ est une valeur propre de A lorsque $\mathrm{rg}(A-\lambda I_n) < n$. Pour déterminer les valeurs propres de f ou de A, il suffit donc de déterminer les valeurs de λ pour lesquelles ce rang est strictement inférieur à n et pour cela on peut effectuer des opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes.

Exemple

Déterminons les valeurs propres de $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

En notant C_1, C_2 et C_3 les trois colonnes, on remarque que $C_1 + 2C_2$ et $C_2 + C_3$ sont nulles, et la matrice n'est pas nulle, donc $\mathrm{rg}(A) = 1$.

Le fait que $\mathrm{rg}(f) < 3$ montre que 0 est une valeur propre de f. De plus, avec le théorème du rang, il vient que $E_0 = \ker(f)$ est de dimension 2 et les relations sur les colonnes constatées ci-dessus montrent que : $\ker(f) = \mathrm{Vect}\big((1,2,0),(0,1,1)\big)$.

D'autre part, on remarque que :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A - 2I_3) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{par } C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3) \\ &= 2. \end{aligned}$$

On en déduit que 2 est une valeur propre de f. De plus, $\ker(f - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ est de dimension 1 et la relation sur les colonnes mise en évidence ci-dessus montre que : $\ker(f - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$.

SF95 Résoudre des systèmes linéaires

Si λ est une valeur propre de A alors pour déterminer le sous-espace propre associé, on peut résoudre le système linéaire homogène de matrice $A - \lambda I_n$.

Exemple

Déterminons le sous-espace propre E_{-1} de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre $\lambda = -1$ et le sous-espace propre E_5 associé à la valeur propre $\lambda = 5$.

Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{X} \in \mathrm{E}_{-1} &\iff (\mathrm{A} - (-1)\mathrm{I}_n)\mathrm{X} = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ -2x + 2y - 2z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \\
&\iff x - y + z = 0 \\
&\iff \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ x+z \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{E}_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. De même :

$$\begin{aligned}
\mathrm{X} \in \mathrm{E}_{5} &\iff (\mathrm{A} - 5\mathrm{I}_n)\mathrm{X} = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} -4x - 2y + 2z = 0 \\ -2x - 4y - 2z = 0 \\ 2x - 2y - 4z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ -2x - y + z = 0 \\ -x - 2y - z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ \quad - 3y - 3z = 0 \\ \quad - 3y - 3z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \quad - z = 0 \\ \quad y + z = 0 \end{cases} \\
&\iff \mathrm{X} = \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{E}_{5} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

SF96 Résoudre un système avec paramètre

Pour trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres d'une matrice A, on résout le système linéaire homogène de matrice $\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_n$: les valeurs propres de A sont celles pour lesquelles ce système admet d'autres solutions que la solution nulle, c'est-à-dire les valeurs pour lesquelles le rang du système est strictement inférieur à n.

Il suffit alors de poursuivre la résolution pour les valeurs de λ trouvées.

Exemple

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considérons, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, le système :

$$(S_\lambda) : \begin{cases} (1-\lambda)x + 4y + 2z = 0 \\ 2x + (-1-\lambda)y - 2z = 0 \\ x + y + (1-\lambda)z = 0. \end{cases}$$

On commence par échanger les lignes 1 et 3 :

$$(S_\lambda) \iff \begin{cases} x + y + (1-\lambda)z = 0 \\ 2x + (-1-\lambda)y - 2z = 0 \\ (1-\lambda)x + 4y + 2z = 0. \end{cases}$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - (1-\lambda)L_1$ donnent :

$$(S_\lambda) \iff \begin{cases} x + y + (1-\lambda)z = 0 \\ (-3-\lambda)y + (2\lambda-4)z = 0 \\ (3+\lambda)y + (2-(1-\lambda)^2)z = 0. \end{cases}$$

L'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ donne :

$$(S_\lambda) \iff \begin{cases} x + y + (1-\lambda)z = 0 \\ (-3-\lambda)y + (2\lambda-4)z = 0 \\ (2-(1-\lambda)^2 + 2\lambda - 4)z = 0 \end{cases}$$

soit, après calcul :

$$(S_\lambda) \iff \begin{cases} x + y + (1-\lambda)z = 0 \\ (-3-\lambda)y + (2\lambda-4)z = 0 \\ -(\lambda-1)(\lambda-3)z = 0. \end{cases}$$

Si $\lambda \notin \{-3, 1, 3\}$ alors le système précédent n'admet que la solution nulle donc ces valeurs de λ ne sont pas valeurs propres.

On étudie alors séparément ces trois cas.

∘ Pour $\lambda = 1$, on a :

$$\begin{aligned} (S_1) &\iff \begin{cases} x + y = 0 \\ -4y - 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -y \\ z = -2y \end{cases} \\ &\iff (x,y,z) = y(-1,1,-2), \end{aligned}$$

donc 1 est valeur propre et le sous-espace propre associé est $\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.

∘ Pour $\lambda = 3$, on a :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{S}_3) &\iff \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ - 6y + 2z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ - 3y + z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 5y \\ z = 3y \end{cases} \\
&\iff (x,y,z) = y(5,1,3),
\end{aligned}$$

donc 3 est valeur propre et le sous-espace propre associé est $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$.

∘ Pour $\lambda = -3$, on a :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{S}_{-3}) &\iff \begin{cases} x + y + 4z = 0 \\ - 10z = 0 \\ - 24z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\
&\iff (x,y,z) = x(1,-1,0),
\end{aligned}$$

donc -3 est valeur propre et le sous-espace propre associé est $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

SF97 Reconnaître des cas particuliers favorables

Il y a des situations très fréquentes pour lesquelles on peut conclure directement.

Par exemple, si la somme s des coefficients de chaque ligne d'une matrice est la même alors s est une valeur propre de cette matrice et $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

Exemple

Trouvons une valeur propre de la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc 2 est une valeur propre de A et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

Dans le même ordre d'idée, si une combinaison linéaire des colonnes est nulle alors 0 est valeur propre et les coefficients de cette combinaison linéaire fournissent un vecteur propre associé.

Exemple

Trouvons une valeur propre de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

On remarque que $C_1 + C_2 = C_3$ et que $C_2 = C_3 + C_4$ ce qui permet de mettre en évidence les relations :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que 0 est une valeur propre de A et que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres (indépendants) associés.

SF98 Exploiter les puissances d'une matrice ou d'un endomorphisme

Un autre cas usuel repose sur le fait que si λ est une valeur propre de A alors λ^k est une valeur propre de A^k, pour tout entier naturel k.

Exemple

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de valeur propre.

Si λ est une valeur propre réelle de A alors λ^2 est une valeur propre de A^2. Cependant, on a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donc -1 est la seule valeur propre de A^2. On aboutit à la relation $\lambda^2 = -1$ alors que λ est supposé réel, ce qui est absurde. Donc A n'admet pas de valeur propre réelle.

■ Comment étudier la diagonalisabilité d'un endomorphisme ou d'une matrice ?

SF99 Déterminer si un endomorphisme ou une matrice est diagonalisable

Le cas le plus favorable est celui où l'endomorphisme, ou la matrice, admet n valeurs propres distinctes : dans ce cas, tous les sous-espaces propres sont des droites vectorielles et l'endomorphisme, ou la matrice, est diagonalisable.

Sinon, il s'agit de vérifier que la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n.

Exemples

1 ▹ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a vu précédemment que la matrice A admettait trois valeurs propres distinctes (-3, 1 et 3) donc A est diagonalisable.

2 ▹ Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

On a vu précédemment que :

- 0 est une valeur propre de B et $\ker(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$;
- 6 est une valeur propre de B et $\ker(B - 6I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

La somme des dimensions des deux sous-espaces propres est égale à 3 donc B est diagonalisable.

3 ▹ Soit $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice C est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux ce qui implique que 1 et 2 sont ses valeurs propres. De plus :

$$\mathrm{rg}(C - I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2, \text{ ainsi } \dim(\ker(C - I_3)) = 1$$

et :

$$\mathrm{rg}(C - 2I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2, \text{ ainsi } \dim(\ker(C - 2I_3)) = 1,$$

donc :

$$\dim\Big(\ker(C - I_3)\Big) + \dim\Big(\ker(C - 2I_3)\Big) = 2 \neq 3,$$

ce qui implique que C n'est pas diagonalisable.

SF100 Déterminer une base de vecteurs propres et considérer la matrice de passage

Si f est un endomorphisme diagonalisable alors en concaténant les bases des sous-espaces propres, on obtient une base de vecteurs propres de f ; dans cette base, la matrice de f est diagonale. De même, si A est une matrice diagonalisable alors en notant P la matrice dont les colonnes sont les différents vecteurs propres, on obtient que $P^{-1}AP$ est diagonale.

Notons que si A est la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ de E alors la matrice P correspond à la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base de vecteurs propres trouvée.

Exemple

Diagonalisons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

On a vu précédemment que f est diagonalisable.

Les vecteurs $(2,-1,0)$, $(3,0,-1)$ et $(1,1,1)$ sont des vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres 0, 0 et 6 ; c'est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f. On note :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers cette base, alors :

$$D = P^{-1}AP \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

■ Comment exploiter la diagonalisation ?

Dans le cadre du programme, on peut rencontrer diverses situations dans lesquelles l'outil matriciel intervient : suites, probabilités... Néanmoins, l'essentiel en terme de savoir-faire consiste dans tous les cas à savoir calculer les puissances d'une matrice carrée.

SF101 Calculer des puissances de matrices

On a vu en TD différentes méthodes (intuition et récurrence, utilisation d'un polynôme annulateur, utilisation de la formule du binôme). La diagonalisation fournit une autre idée.

Si A est une matrice diagonalisable alors on peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale alors, pour tout entier naturel k, $A^k = PD^kP^{-1}$.

Comme les puissances d'une matrice diagonale s'expriment simplement, il est alors possible de calculer les puissances de A.

Exemple

Calculons les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

On commence par diagonaliser cette matrice, on remarque que :

$$\operatorname{rg}(A + 2I_2) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 1, \text{ et } \operatorname{rg}(A - 4I_2) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = 1,$$

donc A admet deux valeurs propres et il s'ensuit que A est diagonalisable.

En examinant les colonnes de $A + 2I_2$ et de $A - 4I_2$, on en déduit que :

$$\ker(A + 2I_2) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \text{ et } \ker(A - 4I_2) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient donc :

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Notons que l'on a facilement obtenu $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (grâce à la formule d'inversion pour les matrices d'ordre 2 : si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et si $\det(M) \neq 0$, alors $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$).

Soit $k \in \mathbb{N}$, on a $A^k = PD^kP^{-1}$, d'où :

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^k & 0 \\ 0 & 4^k \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

soit :

$$A^k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-2)^k + 4^k & -(-2)^k + 4^k \\ -(-2)^k + 4^k & (-2)^k + 4^k \end{pmatrix}.$$

Quelques exercices d'application

Exercice C-54

Pour chacune des matrices suivantes, déterminer les valeurs propres, les sous-espaces propres associés et si la matrice est diagonalisable :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice C-55

À tout polynôme P à coefficients réels, on associe le polynôme $Q = f(P)$ défini par :

$$Q(x) = (x-1)(x-2)P'(x) - 2xP(x).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$.
2. Montrer que si P est un vecteur propre de f alors $\deg(P) = 2$.
3. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de f.

Exercice C-56

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
2. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

$$A^n = P \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

3. On considère les trois suites réelles x, y et z définies par $x_0 = 1$, $y_0 = -1$, $z_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - y_n - 2z_n \\ y_{n+1} = 4x_n - 3y_n - 2z_n \\ z_{n+1} = x_n - y_n - z_n \end{cases}.$$

Exprimer x_n, y_n et z_n en fonction de l'entier n.

Exercice C-57

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 et $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[x]$.

Pour tout P dans E et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(\mathrm{P})(x) = (x^2+1)\mathrm{P}''(x) - 2x\mathrm{P}'(x)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E et écrire la matrice de f dans la base canonique de E.

2. En déduire l'ensemble des valeurs propres de f.

3. Montrer que $\ker(f)$ est contenu dans $\mathbb{R}_3[x]$ puis en donner une base.

4. Déterminer $\ker(f + 2\,\mathrm{id}_\mathrm{E})$.

5. L'application f est-elle diagonalisable ?

Exercice C-58

On considère la matrice $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ définie par :

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$ la base canonique de $\mathbb{R}^7$ et c l'endomorphisme de $\mathbb{R}^7$ dont la matrice dans la base canonique est C. Selon l'usage, on identifie les matrices colonnes (à 7 lignes à coefficients réels) à des vecteurs de $\mathbb{R}^7$. On note $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$ les vecteurs colonnes de la matrice C.

1. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de c, ainsi que le rang de c.

2. On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^7$ engendré par les trois premiers vecteurs colonnes f_1, f_2, f_3 de la matrice C.

- ***a.*** Montrer que F est stable par c.
- ***b.*** Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de F et déterminer la matrice Φ dans cette base de l'endomorphisme φ de F induit par c.
- ***c.*** Pourquoi 1 est-il valeur propre de Φ ?
- ***d.*** Montrer que Φ admet 3 valeurs propres réelles distinctes que l'on déterminera.
- ***e.*** La matrice Φ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

3. Déduire des questions précédentes le spectre de C et les dimensions des sous-espaces propres associés. Montrer que C est diagonalisable dans $\mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ et déterminer une matrice diagonale semblable à C.