CHAPITRE

IV

RÉVISIONS SUR LES SÉRIES ET LES INTÉGRALES

Sommaire

A - Séries

A.1 - Définitions et principales propriétés

Série convergente, série divergente

On considère une suite u de nombres réels et, pour tout $n \geqslant 0$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

On dit que S_n est la ***somme partielle d'ordre*** n de la ***série de terme général*** u_n.

Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de limite S alors on dit que la série de terme général u_n est ***convergente*** de ***somme*** S et on note :

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Dans le cas contraire, on dit que la série de terme général u_n est ***divergente***.

La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$ (ou $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$).

Propriétés des séries convergentes

1 ▹ Si la série $\sum u_n$ converge alors : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2 ▹ Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries convergentes alors, pour tout réel λ, alors :

$$\text{la série } \sum(\lambda u_n + v_n) \text{ converge et } \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + v_n) = \lambda\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

On en déduit que si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ est divergente alors $\sum(u_n + v_n)$ est divergente.

En revanche, on ne peut *a priori* rien dire lorsque les deux séries sont divergentes.

Critères de convergence d'une série à termes positifs

1 ▹ Si la suite u est positive alors la suite des sommes partielles est croissante ; dans ce cas, la série converge si, et seulement si, la suite des sommes partielles est majorée.

2 ▹ Supposons que l'on ait $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang :

- si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge ;
- si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

3 ▹ Supposons que l'on ait $0 \leqslant u_n$ à partir d'un certain rang.

Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Convergence absolue

1 ▹ On dit qu'une série $\sum u_n$ est ***absolument convergente*** lorsque la série $\sum |u_n|$ converge.

2 ▹ Une série absolument convergente est convergente.

3 ▹ Supposons que l'on ait $0 \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et que $u_n = o(v_n)$:

- si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge absolument ;
- si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Séries de référence

1 ▹ La série (de Riemann) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$.

2 ▹ Pour tout réel x, la ***série exponentielle*** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ converge et : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$.

3 ▹ Pour tout réel $q \in \,]-1,1[$, la ***série géométrique*** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} q^n$ converge et : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

4 ▹ Pour tout réel $q \in \,]-1,1[$, les ***séries géométriques « dérivées »*** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} nq^{n-1}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ convergent et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Remarque

Le dernier point est une conséquence de la *formule du binôme négatif*.

Pour tout $x \in]-1,1[$ et tout $r \in \mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant r} \binom{k}{r} x^{k-r}$ converge et on a : $\displaystyle\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$.

A.2 - Absolue convergence et ordre de sommation

Permutation de l'ordre des termes

Soit I un ensemble dénombrable, indexé par $\mathbb{N}$ sous la forme $\mathrm{I} = \{\varphi(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ où φ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans I.

Si la série $\sum u_{\varphi(n)}$ converge absolument, alors sa somme est indépendante de l'indexation φ.

On peut donc noter sans ambiguïté $\displaystyle\sum_{i\in \mathrm{I}} u_i$ cette somme.

Remarques

1 ▹ On en déduit le *théorème de sommation par paquets* énoncé ci-dessous (quitte à ce que les sommes soient égale à $+\infty$).

Soit J un ensemble et, pour chaque $j \in \mathrm{J}$, on considère $\mathrm{I}_j \subset \mathrm{I}$ et l'on suppose que I est la réunion disjointe des I_j :

$$\mathrm{I} = \biguplus_{j \in \mathrm{J}} \mathrm{I}_j.$$

Soit $(u_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille de réels positifs ou nuls, alors :

$$\sum_{i \in \mathrm{I}} u_i = \sum_{j \in \mathrm{J}} \left(\sum_{i \in \mathrm{I}_j} u_i \right).$$

2 ▹ *Théorème de Fubini pour les séries doubles*

Considérons une famille de réels *positifs ou nuls* $(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ indexée par deux entiers naturels.

Il y a équivalence entre les deux assertions suivantes :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{m \in \mathbb{N}} u_{m,n}$ converge, et la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n} \right)$ converge ;
- pour tout $m \in \mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} u_{m,n}$ converge, et la série $\displaystyle\sum_{m \in \mathbb{N}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n} \right)$ converge.

Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n} \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n} \right),$$

et on note $\displaystyle\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} u_{m,n}$ cette somme.

A.3 - L'exemple des séries alternées

Une *série alternée* est une série dont le terme général est de la forme $(-1)^n u_n$ avec (u_n) une suite de signe constant.

Critère spécial des séries alternées

Soit (u_n) une suite de réels positifs, décroissante et convergeant vers 0.

1 ▹ La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n u_n$ converge.

2 ▹ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \right| \leqslant u_{n+1}$.

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a note $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$ alors, du fait de la décroissance de la suite u :

$$\mathrm{S}_{2n+2} - \mathrm{S}_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0$$

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k = -u_{2n+3} + u_{2n+2} \geqslant 0$$

donc les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont respectivement décroissante et croissante.

De plus, on a :

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k = -u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

Il s'ensuit que ces deux suites convergent vers une même limite donc la suite (S_n) converge vers cette limite *i.e.* la série $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$ converge.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ alors :

$$S_{2n+1} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n \leqslant S_{2n}$$

d'où :

$$0 \leqslant - \sum_{k=2n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k = S_{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n \leqslant S_{2n} - S_{2n+1} = u_{2n+1}$$

et :

$$0 \leqslant \sum_{k=2n+2}^{+\infty} (-1)^k u_k = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n - S_{2n+1} \leqslant S_{2n+2} - S_{2n+1} = u_{2n+2}.$$

Dans tous les cas, on a donc R_n du signe de $(-1)^{n+1}$ et : $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

A.4 - Problématiques et savoir-faire fondamentaux

■ Comment déterminer la nature d'une série ?

SF102 **Vérifier si le terme général tend vers 0**

Si une suite u ne converge pas vers 0 alors la série $\sum u_n$ diverge. On a coutume d'appeler ce cas « divergence grossière ».

Exemple

Comme la suite $(\sqrt{n})$ ne converge pas vers 0, la série $\sum \sqrt{n}$ diverge.

SF103 **Mettre en évidence une combinaison linéaire de séries dont la convergence est connue**

Une combinaison linéaire de séries convergentes est convergente donc le fait d'écrire le terme général de la série considérée comme combinaison linéaire de termes généraux de séries convergentes connues, par exemple de séries de référence, permet de conclure.

Exemple

Étudions la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{2n-5}{3^{n+1}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{2n-5}{3^{n+1}} = \frac{2}{9}\left(n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) - \frac{5}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}.$$

Puisque $-1 < \frac{1}{3} < 1$, les séries $\sum n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ et $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^{n}$ sont convergentes donc la série $\sum u_n$ considérée converge également.

SF104 **Majorer un terme général positif par le terme général d'une série convergente**

Si u est positive (ne serait-ce qu'à partir d'un certain rang) et si l'on trouve une suite v telle que $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et telle que la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge également. En particulier, on peut faire appel aux séries de référence.

Exemples

1 ▹ Étudions la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{(n+1)^3}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$0 \leqslant \frac{1}{(n+1)^3} \leqslant \frac{1}{n^2},$$

or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge donc, par le critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série de terme général u_n converge.

2 ▹ Étudions la nature de la série de terme général $u_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$.

Par croissances comparées, on a :

$$n^2 \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+,$$

ce qui induit à partir d'un certain rang :

$$0 \leqslant n^2 \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \leqslant 1,$$

puis, toujours à partir de ce rang :

$$0 \leqslant e^{-\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Là encore, la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge donc, par le critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série de terme général u_n converge.

SF105 Minorer le terme général par le terme général positif d'une série divergente

Si l'on trouve une suite v telle que $0 \leqslant v_n \leqslant u_n$ à partir d'un certain rang et telle que la série $\sum v_n$ diverge alors la série $\sum u_n$ diverge également. En particulier, on peut faire appel aux séries de référence.

Exemple

Étudions la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}},$$

or la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge donc, par le critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série de terme général u_n diverge.

SF106 Exploiter un équivalent du terme général (positif)

Si u est positive (ne serait-ce qu'à partir d'un certain rang) et si l'on trouve une suite v telle que $u_n \sim v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exemples

1 ▹ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{2n+1}{n^3 + 2n^2 + n + 3}$.

Il s'agit d'une suite positive et on a : $u_n \sim \frac{2n}{n^3}$ *i.e.* $u_n \sim \frac{2}{n^2}$.

La série de terme général $\frac{2}{n^2}$ est convergente donc, par le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, il en est de même de la série de terme général u_n.

2 ▹ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$.

Il s'agit d'une suite positive et on a :

$$\begin{aligned} u_n &= n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 1\right) \\ &\sim n\left(\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}\right) \\ &\sim \frac{1}{2n}, \end{aligned}$$

or la série de terme général $\frac{1}{2n}$ est divergente donc, par le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, il en est de même de la série de terme général u_n.

SF107 Montrer la convergence absolue

Lorsque le terme général de la série considérée n'est pas positif (ou plus généralement, pas de signe constant), on peut montrer la convergence absolue de la série puisque cette dernière implique la convergence. Pour ce faire, on peut utiliser les techniques précédentes.

Exemples

1 ▹ Étudions la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$0 \leqslant \left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

or la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge donc, par le critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série de terme général u_n converge absolument et *a fortiori* converge.

2 ▹ Étudions la nature de la série de terme général $v_n = \dfrac{(-1)^n \ln(n)}{n^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a par croissances comparées :

$$n^{3/2} v_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^{1/2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ \text{ donc } \ v_n = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

La série de terme général $\dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge (car $\frac{3}{2} > 1$) donc, par le critère de négligeabilité, la série de terme général v_n converge absolument et *a fortiori* converge.

SF108 Considérer la suite des sommes partielles

Une idée est d'exprimer les sommes partielles (par exemple à l'aide d'un télescopage) puis d'étudier directement la convergence de cette suite. Notons que, bien que ce soit la méthode la plus empirique, il est rare que cela soit possible.

Exemple

Étudions la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

ce qui donne en sommant de 1 à $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ce dernier terme converge vers 1.

On en déduit que la série de terme général u_n converge (et la somme de la série est 1).

Dans le cas d'une série à termes positifs, montrer la convergence d'une série revient à montrer que la suite des sommes partielles est majorée. De même, minorer la suite des sommes partielles par une suite non majorée induit la divergence de la série.

Exemple

Montrons la divergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n}$.

Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2^m-1} \frac{1}{k} &= \sum_{\ell=0}^{m-1} \sum_{k=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} \frac{1}{k} \\ &\geqslant \sum_{\ell=0}^{m-1} \sum_{k=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} \frac{1}{2^{\ell+1}-1} \\ &\geqslant \sum_{\ell=0}^{m-1} \sum_{k=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} \frac{1}{2^{\ell+1}}\end{aligned}$$

La somme intérieure compte $2^{\ell+1} - 1 - 2^\ell + 1 = 2^\ell$ termes. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{2^m-1} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{\ell=0}^{m-1} \frac{1}{2} \geqslant \frac{m}{2}.$$

La suite $(\frac{m}{2})_{m\geqslant 1}$ n'est pas majorée donc la suite des sommes partielles n'est pas majorée et par conséquent la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge.

■ Comment calculer la somme d'une série convergente ?

SF109 Reconnaître des séries de référence de somme connue

Quitte à effectuer un décalage d'indices, il faut reconnaître la série exponentielle ainsi que les séries géométriques et les séries géométriques dérivées (en précisant que la « raison » est entre -1 et 1).

Exemples

1 ▹ On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{n+1}{2^n}$.

Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, la série de terme général $n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ converge, donc celle de terme général u_n également et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} \quad \text{donc} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n} = 4.$$

2 ▹ On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{2^n}{(n+2)!}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{2^n}{(n+2)!} = \frac{1}{4} \frac{2^{n+2}}{(n+2)!}.$$

La série exponentielle $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{2^k}{k!}$ converge donc il en est de même de $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{2^k}{k!}$ c'est-à-dire de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^{n+2}}{n!}$.

Donc la série de terme général u_n converge et :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+2}}{(n+2)!}\\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2^k}{k!}\\ &= \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} - (1+2)\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^2 - (1+2)\right)\end{aligned}$$

donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{\mathrm{e}^2 - 3}{4}.$$

SF110 Mettre en évidence une combinaison linéaire de séries convergentes de somme connue

Cela repose sur le fait que si u_n et v_n sont les termes généraux de deux séries convergentes et si λ et μ sont des réels alors la série de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Exemple

Justifions la convergence et déterminons la somme de la série de terme général $u_n = \frac{n^2}{2^n}$.

Tout d'abord, on a pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\frac{n^2}{2^n} = \frac{n(n-1)+n}{2^n} = \frac{1}{4}\left(n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right) + \frac{1}{2}\left(n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right).$$

Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, les séries de termes généraux $n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ et $n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ convergent, donc celle de terme général u_n également et on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\ &= \frac{1}{4}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}\\ &= 6.\end{aligned}$$

SF111 Calculer explicitement les sommes partielles

Dans les rares cas où cela est possible, le calcul des sommes partielles puis l'étude de leur convergence et de leur limite donne la convergence et la somme de la série.

Exemple

On considère la série de terme général $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, pour $n \geqslant 2$.

Pour tout entier $k \geqslant 2$, on a :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \ln\left(\frac{(k+1)(k-1)}{k^2}\right),$$

d'où pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} u_k &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{(k+1)(k-1)}{k^2}\right) \\
&= \ln\left(\prod_{k=2}^{n} \frac{(k+1)(k-1)}{k^2}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\prod\limits_{k=2}^{n}(k+1)\prod\limits_{k=2}^{n}(k-1)}{\prod\limits_{k=2}^{n} k^2}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\prod\limits_{k=3}^{n+1} k \prod\limits_{k=1}^{n-1} k}{\prod\limits_{k=2}^{n} k^2}\right) \\
&= \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right) \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln(2).
\end{aligned}$$

Donc la série de terme général u_n converge et sa somme est $-\ln(2)$.

B - Intégration sur un segment

B.1 - Quelques éléments fondamentaux

Il n'est, là encore, pas question de revenir sur tout le cours de première année. Citons simplement quelques points fondamentaux ou techniques.

Propriétés de l'intégrale

1 ▹ *Linéarité*

Soit f et g continues sur $[a,b]$ et λ un réel : $\displaystyle\int_a^b (\lambda f+g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$

2 ▹ *Relation de Chasles*

Soit f continue sur $[a,b]$ et c un élément de $[a,b]$: $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

3 ▹ *Positivité de l'intégrale*

Soit f continue sur $[a,b]$ avec f positive ou nulle sur $[a,b]$: $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$

4 ▹ *Stricte positivité de l'intégrale*

Soit f continue sur $[a,b]$ avec f positive sur $[a,b]$ et f non nulle : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0.$

5 ▹ *Croissance de l'intégrale*

Soit f et g continues sur $[a,b]$ avec $f(t)\leqslant g(t)$ pour tout $t\in[a,b]$: $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$

6 ▹ *Encadrement*

Soit f continue sur $[a,b]$ et m et M des réels vérifiant $m\leqslant f(t)\leqslant \mathrm{M}$ pour tout $t\in[a,b]$:

$$m(b-a)\leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}(b-a).$$

7 ▹ *Inégalité triangulaire*

Soit f continue sur $[a,b]$: $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$

8 ▹ *Primitive s'annulant en a*

Soit f continue sur I et $a\in \mathrm{I}$. La fonction $x\mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Intégration par parties

Soit u et v deux applications de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Changement de variable sur un segment

Soit f une application continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $\varphi : [a,b] \to \mathrm{I}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ alors :

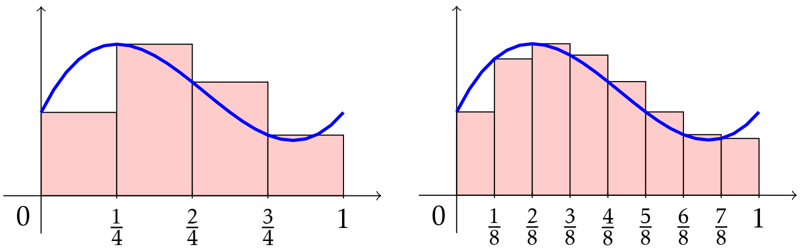
$$\int_a^b f\big(\varphi(u)\big)\, \varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Sommes de Riemann

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, alors :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Géométriquement, le terme de la suite correspond à une somme d'aires de rectangles.



Lorsque n (donc le nombre de rectangles) tend vers l'infini, la suite tend vers l'aire sous la courbe.

On a également :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Cette fois, le terme de la suite correspond à une somme d'aires de rectangles dont la hauteur est déterminée par le point de droite.

Formules de Taylor

1 ▹ *Formule de Taylor avec reste intégral*

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathrm{I}$, alors :

$$\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

2 ▹ *Inégalité de Taylor-Lagrange*

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I et $n \in \mathbb{N}$ tels que f^{n+1} soit bornée sur I, alors :

$$\forall (a,x) \in \mathrm{I}^2,\ \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \sup_{t\in\mathrm{I}} \left| f^{(n+1)}(t) \right| \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

B.2 - Problématiques et savoir-faire fondamentaux

■ Comment calculer une intégrale ?

SF112 **Trouver une primitive de l'expression intégrée**

La première idée à avoir pour calculer une intégrale est de chercher une primitive F de la fonction f à intégrer, sur l'intervalle considéré puisque l'on a alors :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Exemple

Calculons $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Une primitive de $t \mapsto t\,\mathrm{e}^{-t^2}$ sur $[0,1]$ est : $t \mapsto -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}$.

Cela permet d'écrire :

$$\mathrm{I} = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}.$$

SF113 **Utiliser les propriétés de linéarité et de Chasles**

La linéarité et la relation de Chasles permettent d'écrire l'intégrale considérée comme une somme d'intégrales soit en conservant les bornes mais en scindant la fonction (linéarité), soit en conservant la fonction mais en scindant les bornes (relation de Chasles).

Exemple

Calculons $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-1}^2 |x|\,\mathrm{d}x$.

La relation de Chasles permet d'écrire :

$$\mathrm{I} = \int_{-1}^0 |x|\,\mathrm{d}x + \int_0^2 |x|\,\mathrm{d}x,$$

d'où en simplifiant les valeurs absolues :

$$\mathrm{I} = \int_{-1}^0 (-x)\mathrm{d}x + \int_0^2 x\,\mathrm{d}x,$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2\\ &= \frac{1}{2} + 2\\ &= \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

SF114 Intégrer par parties

L'intégration par parties permet de ramener le calcul d'une intégrale au calcul d'une autre intégrale.

Exemple

Calculons $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^2 x\ln(x)\,\mathrm{d}x$.

On pose pour tout $x \in [1,2]$:

$$\begin{cases} u(x) = \frac{1}{2}x^2 \\ v(x) = \ln(x) \end{cases} \quad \text{donc} \begin{cases} u'(x) = x \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,2]$ donc on a par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\ln(2) - \int_1^2 \frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x \\ &= 2\ln(2) - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^2 \\ &= 2\ln(2) - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

SF115 Effectuer un changement de variable

Il y a deux façons d'utiliser le théorème de changement de variable.

$\diamond$ Pour calculer une intégrale de la forme :

$$\int_a^b g(t)\mathrm{d}t,$$

lorsqu'on arrive à écrire g sous la forme $g = (f \circ \varphi)\varphi'$ où les fonctions f et φ sont respectivement continue et de classe $\mathscr{C}^1$; cela revient à écrire $u = \varphi(t)$:

$$\int_a^b g(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\mathrm{d}u.$$

$\diamond$ Pour calculer une intégrale de la forme :

$$\int_\alpha^\beta f(u)\mathrm{d}u,$$

en écrivant sa variable d'intégration u sous la forme $u = \varphi(t)$ avec $\alpha = \varphi(a)$ et $\beta = \varphi(b)$:

$$\int_\alpha^\beta f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

Dans la pratique, on résume souvent le changement de variable en écrivant $t = \varphi(u)$ puis $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\mathrm{d}u$ et on remplace les bornes a et b par les bornes $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.

Exemple

Montrons que si f est continue et paire sur un intervalle $[-a, a]$ alors on a : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$.

On écrit tout d'abord :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Considérons la fonction $\varphi : [0, a] \to [-a, 0],\ u \mapsto -u$.

Il s'agit d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ d'où :

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(0)} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{a}^{0} f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{a}^{0} f(-u)\,(-1)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{0}^{a} f(-u)\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

et le fait que f soit paire donne :

$$\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(u)\,\mathrm{d}u,$$

d'où :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Notons qu'avec le même raisonnement, on obtient lorsque f est impaire : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

SF116 Utiliser des sommes de Riemann

La notion de somme de Riemann correspond à l'idée géométrique d'approcher « l'aire sous la courbe » par une somme « d'aires de rectangles ».

Exemple

Retrouvons l'égalité $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$ à l'aide de sommes de Riemann.

La continuité de l'application $x \mapsto x^2$ montre que :

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-0}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2,$$

d'où :

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2,$$

puis :

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{1}{3}.$$

L'idée d'utiliser des sommes de Riemann pour calculer une intégrale a un grand intérêt numérique et sa programmation en Python est aisée.

Exemple

Approcher numériquement l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

On a :

$$\mathrm{I} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-\left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

On peut définir une fonction en Python admettant n pour paramètre et ayant pour sortie la valeur de la somme de Riemann calculée avec n termes.

```
import numpy as np

def S(n):
    somme=0
    for k in range(n):
        somme += np.exp(-k**2/(n**2))
    return(somme/n)
```

■ Comment exploiter les propriétés de l'intégrale ?

SF117 Manipuler des inégalités grâce à la croissance et la positivité

La croissance de l'intégrale permet, à partir d'une inégalité entre deux expressions, d'en déduire une inégalité du même type entre les intégrales de ces deux expressions ; la positivité permet, à partir de la positivité d'une expression, d'en déduire la positivité de l'intégrale de cette expression (ou à partir de la négativité d'une expression d'en déduire la négativité de son intégrale). Dans tous les cas, il faut prendre garde à considérer les bornes d'intégration dans l'ordre croissant.

Exemple

Étudions la convergence de la suite u donnée par : $u_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$, on a $1-t^2 \in [0,1]$ donc :

$$0 \leqslant (1-t^2)^{n+1} \leqslant (1-t^2)^n.$$

Comme $0<1$, la positivité et la croissance de l'intégrale donnent :

$$0 \leqslant \int_0^1 (1-t^2)^{n+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t,$$

ce qui signifie que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ donc la suite u est positive et décroissante. On en déduit que la suite u converge.

Rappelons également le résultat d'usage très fréquent suivant : si f est continue et positive sur $[a,b]$ et si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ alors f est nulle sur $[a,b]$.

Exemple

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et telle que :

$$\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f^3(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f^4(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrons que $f = 0$ ou $f = 1$.

Puisque $(f^2 - f)^2 = f^4 - 2f^3 + f^2$, il résulte de l'hypothèse que :

$$\int_0^1 (f^2 - f)^2 = 0.$$

La fonction $(f^2 - f)^2$ étant positive et continue, il s'ensuit qu'elle est nulle donc $f^2 = f$.

Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$, on a $f(x) = 1$ ou $f(x) = 0$.

Comme f est continue, on a $f = 1$ ou $f = 0$.

SF118 Encadrer et majorer des intégrales

Tout d'abord, la croissance de l'intégrale permet d'obtenir des encadrements. Par ailleurs, on dispose d'un analogue de l'inégalité triangulaire avec la majoration :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t,$$

où f est une fonction continue (ou continue par morceaux) sur un intervalle $[a,b]$ (où a et b sont des réels tels que $a \leqslant b$).

Exemple

Montrons que : $\displaystyle\int_0^1 t^n \sin(\pi t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Comme $0 \leqslant 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 t^n \sin(\pi t)\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_0^1 |t^n \sin(\pi t)|\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^1 t^n \mathrm{d}t \\ &\leqslant \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1}\right]_0^1 \\ &\leqslant \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Le majorant tend vers 0 donc, par théorème d'encadrement, le terme de gauche également, ce qui donne bien la limite annoncée.

On peut également exploiter la formule de Taylor avec reste intégral.

Exemple

Montrons que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$x - \frac{1}{6}x^3 \leqslant \sin(x) \leqslant x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5.$$

La fonction sin est de classe $\mathscr{C}^\infty$ donc la formule de Taylor donne :

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{(x-0)^k}{k!} \sin^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} \sin^{4}(t)\mathrm{d}t$$

soit :

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} \sin(t)\mathrm{d}t.$$

Pour tout $t \in [0,x]$, on a $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc :

$$\frac{(x-t)^3}{3!} \sin(t) \geqslant 0$$

d'où, par positivité de l'intégrale sur $[0,x]$:

$$\int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} \sin(t)\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

On en déduit :

$$\sin(x) \geqslant x - \frac{1}{6}x^3.$$

De même, on a :

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{5} \frac{(x-0)^k}{k!} \sin^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^5}{5!} \sin^{6}(t)\mathrm{d}t$$

soit :

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \int_0^x \frac{(x-t)^5}{5!} \sin(t)\mathrm{d}t.$$

Pour tout $t \in [0,x]$, on a $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc :

$$\frac{(x-t)^5}{5!} \sin(t) \geqslant 0$$

d'où, par positivité de l'intégrale sur $[0,x]$:

$$\int_0^x \frac{(x-t)^5}{5!} \sin(t)\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

On en déduit :

$$\sin(x) \leqslant x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5.$$

SF119 Calculer des sommes de séries à l'aide de la formule de Taylor

Exemple

Montrer que pour tout réel x : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^x$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On commence par supposer $x \geqslant 0$. La fonction exp est de classe $\mathscr{C}^\infty$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\left|\exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-0)^k}{k!} \exp^{(k)}(0)\right| \leqslant \sup_{t\in[0,x]} \left|\exp^{(n+1)}(t)\right| \cdot \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

donc :

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \sup_{t\in[0,x]} \left|\exp^t\right| \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$\leqslant e^x \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

or $x^{n+1} = o((n+1)!)$ donc le majorant tend vers 0 donc, par théorème d'encadrement, le terme de gauche tend vers 0.

De même, si $x \leqslant 0$, on a :

$$\left|\exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-0)^k}{k!} \exp^{(k)}(0)\right| \leqslant \sup_{t\in[x,0]} \left|\exp^{(n+1)}(t)\right| \cdot \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

donc :

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \sup_{t\in[x,0]} \left|\exp^t\right| \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$\leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

or $x^{n+1} = o((n+1)!)$ donc le majorant tend vers 0 donc, par théorème d'encadrement, le terme de gauche tend vers 0.

Dans tous les cas, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x \quad \text{donc} \quad e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

SF120 Calculer les limites de suites du type « sommes de Riemann »

On a évoqué la possibilité de calculer des intégrales (notamment numériquement) à l'aide de sommes de Riemann. On peut également faire la démarche inverse : calculer, à l'aide d'une intégrale, la limite d'une suite apparaissant comme une somme de Riemann d'une fonction continue.

Exemple

Calculons la limite de $u_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k+n}$.

Pour tout $n \geqslant 1$, on a (en posant $\ell = k - n$) :

$$u_n = \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{\ell + 2n}$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{2 + \frac{\ell}{n}}.$$

On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2+x},$$

qui est continue sur $[0,1]$, alors :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} f\left(\frac{\ell}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2+t}\\ &= \Big[\ln(2+t)\Big]_0^1\\ &= \ln\left(\frac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

On a donc :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

C - Intégrales généralisées

C.1 - Définition et principales propriétés

Intégrale convergente, intégrale divergente

Soit f une fonction continue sur un intervalle de la forme $[a,b[$ où b est soit un réel, soit $+\infty$.

Si $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers b alors on dit que l'***intégrale impropre*** ou ***généralisée*** $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est ***convergente*** et on note :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale est ***divergente***.

Remarques

1 ▹ La définition s'adapte naturellement au cas d'une fonction continue sur un intervalle $]a,b]$ avec a réel ou $-\infty$.

2 ▹ Si f est continue sur $[a,b[$ et si $c \in\,]a,b[$ alors f est continue sur $[a,c]$ donc l'intégrale de f entre a et c ne pose aucun problème. Il s'ensuit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Propriétés des intégrales convergentes

1 ▹ Si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ sont convergentes alors, pour tout réel λ, $\int_a^b \big(\lambda f(t)+g(t)\big)\mathrm{d}t$ est convergente et :

$$\int_a^b \big(\lambda f(t)+g(t)\big)\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

2 ▹ Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ telle que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Si $f \geqslant 0$ sur $[a,b[$ alors : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

3 ▹ Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b[$ vérifiant $f \leqslant g$ et telles que les deux intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème de changement de variable

Soit φ une application de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement monotone sur un intervalle $]a,b[$; on note $\alpha = \lim\limits_{a} \varphi$ et $\beta = \lim\limits_{b} \varphi$.

Si f est continue sur l'intervalle d'extrémités α et β alors les deux intégrales $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature.

En cas de convergence, on a : $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

Critères de convergence d'une intégrale de fonction positive

1 ▹ Si la fonction f est positive sur $[a,b[$ alors la primitive $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est croissante sur $[a,b[$; dans ce cas, l'intégrale converge si, et seulement si, la fonction F est majorée.

2 ▹ Supposons que l'on ait $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de b :
- si $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge ;
- si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ diverge.

3 ▹ Supposons que l'on ait $f(x) \geqslant 0$ au voisinage de b, et $f(x) \underset{b}{\sim} g(x)$.

Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ ont même nature.

Convergence absolue

1 ▹ On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est ***absolument convergente*** lorsque $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ converge.

2 ▹ Une intégrale absolument convergente est convergente.

3 ▹ Supposons que l'on ait $g(x) \geqslant 0$ au voisinage de b, et $f(x) \underset{b}{=} o\big(g(x)\big)$.
- si $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge absolument ;
- si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ diverge.

Intégrales de référence

1 ▹ Considérons deux réels $a > 0$ et α :
- l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$;
- l'intégrale $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$.

2 ▹ Pour tout réel λ, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\lambda > 0$.

C.2 - La fonction Γ

La fonction Γ est définie en un réel x par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

Proposition IV-1

Le domaine de définition de la fonction Γ est $]0,+\infty[$.

Démonstration

Proposition IV-2

Pour tout réel $x > 0$, on a : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Démonstration

Corollaire IV-3

Pour tout entier naturel n, on a : $\Gamma(n+1) = n!$.

Démonstration

C.3 - Problématiques et savoir-faire fondamentaux

■ Comment déterminer la nature d'une intégrale ?

SF121 **Commencer par déterminer les « impropretés »**

Le premier réflexe est d'examiner le domaine de continuité de la fonction afin de déterminer les réels en lesquels la fonction n'est pas continue ainsi que les éventuelles bornes infinies. Il s'agit alors de justifier la convergence en chacune des impropretés.

Exemples

1 ▹ Considérons l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx$.

La fonction $x \mapsto e^{-2x}$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc il suffit de justifier la convergence de l'intégrale en $+\infty$.

Dans ce cas, on peut revenir à la définition en écrivant pour $X \in [0,+\infty[$:

$$\int_0^X e^{-2x}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^X = \frac{1-e^{-2X}}{2} \xrightarrow[X\to+\infty]{} \frac{1}{2},$$

donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx$ converge.

Notons qu'il s'agit d'une intégrale de référence.

2 ▹ L'étude du domaine de définition de la fonction Γ précédemment illustre également cette idée.

SF122 **Repérer le cas d'une intégrale faussement impropre**

Si la fonction n'est pas continue en un réel mais y est prolongeable par continuité alors la convergence de l'intégrale est assurée en ce point et on parle d'intégrale faussement impropre en ce point.

Exemple

Considérons l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x\ln(x)dx$.

La fonction $x \mapsto x\ln(x)$ est continue sur $]0,1]$ mais on a : $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, donc l'intégrale est faussement impropre en 0 donc elle converge.

SF123 **Utiliser la définition en invoquant une primitive**

On peut bien entendu revenir à la définition en déterminant, lorsque c'est possible, une primitive de la fonction intégrée.

Exemple

Considérons l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc il s'agit d'étudier la convergence de l'intégrale en $+\infty$.

Revenons à la définition en écrivant pour $X \in [0,+\infty[$:

$$\int_0^X \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{Arctan}(x)\Big]_0^X = \mathrm{Arctan}(X) \xrightarrow[X\to+\infty]{} \frac{\pi}{2},$$

donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ converge.

SF124 Mettre en évidence une combinaison linéaire d'intégrales dont la nature est connue

Une somme d'intégrales convergentes étant convergente, on peut conclure aisément si l'intégrale considérée se présente comme combinaison linéaire de deux intégrales convergentes ou d'une convergente et d'une divergente.

Exemple

Considérons l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\ln(x)-1}{x}\mathrm{d}x$.

Pour tout $x \in]0,1]$, on a : $\dfrac{x^2\ln(x)-1}{x} = x\ln(x) - \dfrac{1}{x}$.

On a déjà vu que $\displaystyle\int_0^1 x\ln(x)\mathrm{d}x$ converge et que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ diverge.

Par combinaison linéaire, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\ln(x)-1}{x}\mathrm{d}x$ diverge.

SF125 Utiliser un critère de comparaison ou d'équivalence dans le cas d'une fonction positive

Si f est continue sur $[a,b[$ et positive au voisinage de b et si l'on trouve une fonction g telle que $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de b ou telle que $f(x) \underset{b}{\sim} g(x)$, et telle que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge également.

De même, si f est continue sur $[a,b[$ et si l'on trouve une fonction g telle que $0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$ au voisinage de b ou telle que $f(x) \underset{b}{\sim} g(x)$, et telle que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ diverge alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge également.

Exemple

Considérons l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^3}\mathrm{d}x$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^3}$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc il s'agit d'étudier la convergence de l'intégrale en $+\infty$.

Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$0 \leqslant \frac{x}{1+x^3} \leqslant \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ est convergente donc, par critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^3}\mathrm{d}x$ converge.

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^3}\mathrm{d}x$ converge.

SF126 Montrer la convergence absolue

Dans le cas où la fonction intégrée n'est pas de signe constant, on peut chercher à montrer la convergence absolue puisque cette dernière induit la convergence.

Exemple

Considérons l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\mathrm{d}x$.

Pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a : $\displaystyle\left|\frac{\sin(x)}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ est convergente donc, par critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\mathrm{d}x$ est (absolument) convergente.

SF127 Intégrer par parties

L'intégration par parties (que l'on applique toujours pour des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment, donc pour des intégrales classiques) permet de ramener l'étude de la convergence de l'intégrale considérée à l'étude de la convergence d'une autre intégrale.

Exemple

Déterminons la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x$.

La fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc il s'agit d'étudier la convergence de l'intégrale en 0 et en $+\infty$.

La fonction est prolongeable par continuité en 0 (la limite est égale à 1) donc l'intégrale converge en 0.

On en déduit par exemple que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x$ converge, on étudie donc désormais la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x$.

Pour étudier la convergence en $+\infty$, on considère $\mathrm{X} > 1$ et on intègre par parties en posant pour tout $x \in [1, \mathrm{X}]$:

$$\begin{cases} u(x) = -\cos(x) \\ v(x) = -\frac{1}{x^2} \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} u'(x) = \sin(x) \\ v'(x) = \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1, \mathrm{X}]$ d'où :

$$\int_1^{\mathrm{X}} \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos(x)}{x}\right]_1^{\mathrm{X}} + \int_1^{\mathrm{X}} \frac{\cos(x)}{x^2}\mathrm{d}x.$$

Tout d'abord, on a :

$$\left[-\frac{\cos(x)}{x}\right]_1^{X} = \cos(1) - \frac{\cos(X)}{X}.$$

En remarquant que cette dernière fraction est le produit d'une fonction bornée et d'une fonction qui tend vers 0 en $+\infty$, on conclut que la limite de cette fraction en $+\infty$ est nulle. Ainsi, $\lim\limits_{X\to+\infty}\left(\cos(1) - \frac{\cos(X)}{X}\right) = \cos 1$.

D'autre part, pour tout $x \in [1,+\infty[$, on a :

$$\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$$

et on a déjà vu que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ converge donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}\mathrm{d}x$ converge (absolument).

On en déduit que $\displaystyle\int_1^{X} \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x$ admet une limite finie quand X tend vers $+\infty$, on obtient ainsi la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x$.

SF128 Changer de variables

Le théorème de changement de variables permet de ramener l'étude de la convergence de l'intégrale considérée à celle d'une autre intégrale.

Exemple

Dans un chapitre ultérieur de probabilités, on considérera l'intégrale convergente $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$.

En considérant cette dernière, déterminons la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t^2}\mathrm{d}t$.

La fonction $t \mapsto 2t$ est strictement monotone sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ donc on peut poser $x = 2t$ et, d'après le théorème de changement de variable, les intégrales :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(2t)^2}{2}} \times 2\mathrm{d}t$$

sont de même nature ce qui induit la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t^2}\mathrm{d}t$.

■ Comment calculer une intégrale convergente ?

SF129 Utiliser une primitive

Si f est continue sur $[a,b[$ et si F est une primitive de f sur $[a,b[$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ converge si, et seulement si, F admet une limite finie ℓ en b et l'intégrale vaut alors $\ell - \mathrm{F}(a)$.

Exemple

Calculons $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ est continue sur $[0,1[$ donc le seul problème est en 1.

Soit $a \in]0,1[$:

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x &= \Big[-2\sqrt{1-x}\Big]_0^a \\ &= 2-2\sqrt{1-a},\end{aligned}$$

puis :

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x \xrightarrow[a\to 1]{} 2,$$

donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$ converge et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x = 2$.

SF130 Mettre en évidence une combinaison linéaire d'intégrales

La linéarité de l'intégrale permet de calculer séparément diverses intégrales convergentes **[S5.6]**.

Exemple

Calculons $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+2}{x^3}\mathrm{d}x$.

La fonction $x \mapsto \frac{x+2}{x^3}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et on a :

$$\frac{x+2}{x^3} = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}.$$

On en déduit pour tout $a > 1$:

$$\begin{aligned}\int_1^a \frac{x+2}{x^3}\mathrm{d}x &= \int_1^a \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x + \int_1^a \frac{2}{x^3}\mathrm{d}x \\ &= \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^a + \Big[-\frac{1}{x^2}\Big]_1^a \\ &= \Big(1-\frac{1}{a}\Big) + \Big(1-\frac{1}{a^2}\Big) \\ &\xrightarrow[a\to+\infty]{} 2,\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+2}{x^3}\mathrm{d}x$ converge et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+2}{x^3}\mathrm{d}x = 2$.

SF131 Ramener le calcul à celui d'une autre intégrale «plus simple»

De même que pour simplement montrer la convergence, intégration par parties et changement de variable permettent de ramener le calcul de l'intégrale considérée à celui d'une intégrale « plus simple ».

Exemples

1 ▹ Calculons $\displaystyle\int_{-1}^0 \ln(x+1)\mathrm{d}x$.

La fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ est continue sur $]-1,0]$ donc le seul problème est en -1.

Soit $a \in]-1, 0]$, on considère les fonctions u et v définies sur $]a, 0[$ par :

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x+1) \\ v(x) = x+1 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x+1} \\ v'(x) = 1. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a, 0]$ donc on obtient par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_a^0 \ln(x+1)\mathrm{d}x &= \Big[(x+1)\ln(x+1)\Big]_a^0 - \int_a^0 (x+1)\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x \\ &= -(a+1)\ln(a+1) + a. \end{aligned}$$

Par croissances comparées, on a : $(a+1)\ln(a+1) \xrightarrow[a \to -1]{} 0$. On en déduit que l'expression tend vers -1 quand a tend vers -1.

Donc $\displaystyle\int_{-1}^0 \ln(x+1)\mathrm{d}x$ converge et $\displaystyle\int_{-1}^0 \ln(x+1)\mathrm{d}x = -1$.

2 ▹ Calculons $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t^2}\mathrm{d}t$.

Le changement de variables mis en place dans un exemple précédent permet de prouver l'égalité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t^2}\mathrm{d}t.$$

Ainsi, avec la valeur de l'intégrale de référence, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Quelques exercices d'application

Exercice C-59

1. Calculer : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x)+1)^2 \mathrm{d}x$.
2. Calculer : $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t\ \sin(t)}{\cos^3(t)} \mathrm{d}t$.
3. En posant $t = \ln(x)$, calculer : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_2^{\mathrm{e}} \frac{1}{\ln(x)^3\ x} \mathrm{d}x$.

Exercice C-60

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En intégrant par parties I_{n+2}, établir que : $(n+2)\mathrm{I}_{n+2} = (n+1)\mathrm{I}_n$.
3. Vérifier que $(\mathrm{I}_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante. En déduire que : $\dfrac{n+1}{n+2}\mathrm{I}_n \leqslant \mathrm{I}_{n+1} \leqslant \mathrm{I}_n$.
4. Démontrer que : $\mathrm{I}_{n+1} \sim \mathrm{I}_n$.
5. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ (n+1)\mathrm{I}_{n+1}\mathrm{I}_n = \dfrac{\pi}{2}$.
6. En déduire que : $\mathrm{I}_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Exercice C-61

Calculer la limite de la suite u donnée pour tout $n \geqslant 1$ par : $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)}$.

Indication : le calcul pourra nécessiter un changement de variable dans une intégrale à l'aide de l'application $t \mapsto \frac{1+\sin(t)}{2}$.

Exercice C-62

Calculer le développement limité à l'ordre 10 en 0 de : $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$.

Exercice C-63

Dans chacun des cas suivants, étudier la convergence de la série de terme général u_n :

1. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;
2. $u_n = \dfrac{1}{n^2\sqrt{n+1}}$;
3. $u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$;
4. $u_n = \dfrac{\left(\ln(n)\right)^2}{n^4}$;
5. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$;
6. $u_n = \dfrac{\cos(n)-\sin(n)}{n^2}$.

Exercice C-64

Dans chacun des cas suivants, étudier la convergence de la série de terme général u_n et calculer la somme en cas de convergence :

1. $u_n = (n+1)\mathrm{e}^{-n}$;
2. $u_n = \dfrac{n(n+1)}{3^n}$;
3. $u_n = \dfrac{2^n}{(n+1)!}$;
4. $u_n = \dfrac{n^2+n+1}{2^n}$;
5. $u_n = \dfrac{n\,2^n}{(n+1)!}$.

Exercice C-65

Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série de terme général : $u_n = (-1)^n n^a \left(\dfrac{1}{n} - \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

Exercice C-66

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs strictement positives telle qu'il existe un réel $k \geqslant 0$ vérifiant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} k.$$

1. Montrer que si $0 \leqslant k < 1$ alors la série de terme général u_n est convergente.
2. Montrer que si $k > 1$ alors la série de terme général u_n est divergente.
3. Que peut-on dire lorsque $k = 1$?

Exercice C-67

Dans chacun des cas suivants, étudier la convergence de l'intégrale :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$;
2. $\displaystyle\int_0^{1} (2-t)\,\ln(t)\,\mathrm{d}t$;
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice C-68

Dans chacun des cas suivants, montrer la convergence de l'intégrale et calculer sa valeur :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-5t}\,\mathrm{d}t$;
2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$;
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+3)^2}\,\mathrm{d}t$;
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\ln\big(\tan(t)\big)\,\mathrm{d}t$.

Exercice C-69

Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$.

1. Montrer que u_n est bien défini.

2. Déterminer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$?

Exercice C-70

Pour tout x et y réels strictement positifs, on pose :

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t.$$

1. Prouver la convergence de l'intégrale définissant $\mathrm{B}(x,y)$.

2. ***a.*** Prouver que, pour tous $x>0$ et $y>0$, on a : $\mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(y,x)$.

b. Montrer que, pour tout $x>0$ et $y>0$, on a : $\mathrm{B}(x+1,y) = \frac{x}{y}\mathrm{B}(x,y+1)$.

3. Montrer que, pour tous $x>0$ et $y>0$, on a : $\mathrm{B}(x,y+1) = \mathrm{B}(x,y) - \mathrm{B}(x+1,y)$.

En déduire que :

$$\mathrm{B}(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\mathrm{B}(x,y).$$

4. Soit n un entier naturel non nul. Soit x un réel strictement positif.

a. Étudier le signe sur $[0,1]$ de la fonction $g : t \mapsto \mathrm{e}^{-t} - 1 + t$. En déduire que pour tout $t \in [0,n]$, on a :

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

b. Montrer que, pour tout $t \in [0,n]$, on a :

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)\mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.$$

c. Montrer que :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma(x).$$

5. Montrer que :

$$\forall x>0,\ \Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Exercice C-71

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, on note :

$$\mathrm{I} = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{R}_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big).$$

1. On suppose que f est une fonction lipschitzienne sur $[a,b]$, de rapport λ, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2,\ \left|f(x)-f(y)\right| \leqslant \lambda \left|x-y\right|.$$

Montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |\mathrm{R}_n - \mathrm{I}| \leqslant \frac{\lambda(b-a)^2}{2n}.$$

2. Que peut-on dire dans le cas d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$?
3. Proposer un script en Python permettant d'obtenir une valeur approchée à 10^{-5} près de :

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice C-72

1. Soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ sur un intervalle I et $(\alpha,\beta) \in \mathrm{I}^2$.

   En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 3 pour φ entre $\frac{\alpha+\beta}{2}$ et α, puis entre $\frac{\alpha+\beta}{2}$ et β, montrer que :

$$\varphi(\beta)-\varphi(\alpha) = (\beta-\alpha)\varphi'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} (\beta-t)^2\varphi'''(t)\,\mathrm{d}t - \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\alpha} (\alpha-t)^2\varphi'''(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

2. On considère une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et on subdivise l'intervalle $[a,b]$ de façon régulière en $n+1$ points par : $\forall k \in [\![0,n]\!],\ a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.

   On pose également $\mathrm{M}_2 = \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b} \left|f''(t)\right|$.

   On souhaite montrer que $\mathrm{I} = \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est la limite de : $\mathrm{S}_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\right)$.

   a. Interpréter géométriquement la somme S_n.

   b. En utilisant la question **1.**, montrer que :

$$\forall n \geqslant 1,\ |\mathrm{I}-\mathrm{S}_n| \leqslant \frac{\mathrm{M}_2(b-a)^3}{24n^2}.$$

   c. À l'aide de Python, comparer numériquement l'efficacité de cette méthode à celle de l'exercice précédent.

Exercice C-73

Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2).$$