

Exercice 1

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n ($n \geq 2$). On note S (respectivement A) le sous-espace vectoriel de E formé des matrices symétriques (respectivement antisymétriques).

Soit (α, β) deux réels donnés non nuls et f l'application définie sur E , pour tout $M \in E$ par :

$$f(M) = \alpha M + \beta {}^t M.$$

1. Montrer que $E = S \oplus A$.
2. Exprimer f à l'aide de p et q , où $q = I - p$, quand p désigne le projecteur sur S de direction A .
3. Exprimer $f^2 = f \circ f$ en fonction de f et de I .
4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un automorphisme de E . Exprimer alors f^{-1} en fonction de f et de I .
5. Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f^k en fonction de p, q, α, β . En déduire la puissance k -ième de la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha + \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha + \beta \end{bmatrix}$$

1. Question vue en cours. On a pour tout $M \in E$:

$$M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + {}^t M)}_{\in S} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - {}^t M)}_{\in A}.$$

2. Tout d'abord, on a $p(M) = \frac{1}{2}(M + {}^t M)$ et $q(M) = \frac{1}{2}(M - {}^t M)$ donc $M = p(M) + q(M)$ et ${}^t M = p(M) - q(M)$. On a donc :

$$\forall M \in E, f(M) = \alpha(p + q)(M) + \beta(p - q)(M)$$

c'est-à-dire :

$$f = \alpha(p + q) + \beta(p - q) = (\alpha + \beta)p + (\alpha - \beta)q.$$

3. On a $p \circ q$ et $q \circ p$ nulles donc :

$$\begin{aligned} f^2 &= ((\alpha + \beta)p + (\alpha - \beta)q) \circ ((\alpha + \beta)p + (\alpha - \beta)q) \\ &= (\alpha + \beta)^2 p \circ p + (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)(q \circ p + p \circ q) + (\alpha - \beta)^2 q \circ q \\ &= (\alpha + \beta)^2 p + (\alpha - \beta)^2 q \\ &= (\alpha^2 + \beta^2)(p + q) + 2\alpha\beta(p - q) \\ &= (\alpha^2 + \beta^2)I + 2\alpha(f - \alpha I) \\ &= (\beta^2 - \alpha^2)I + 2\alpha f. \end{aligned}$$

4. On a : $f^2 - 2\alpha f = (\beta^2 - \alpha^2)I$.
Si $\alpha^2 \neq \beta^2$ alors f est bijective et $f^{-1} = \frac{1}{\beta^2 - \alpha^2}(f - 2\alpha I)$.
Si $\alpha = \beta$ alors $f = 2\alpha p$ et f n'est pas bijective.
Si $\alpha = -\beta$ alors $f = 2\alpha q$ et f n'est pas bijective.
Une condition nécessaire et suffisante est donc $\alpha \neq \pm\beta$.
5. La matrice A est la matrice de f dans la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

Le polynôme d'expression $P(x) = x^2 - 2\alpha x - (\beta^2 - \alpha^2)$ est annulateur de f et ses racines sont $\alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$. On peut donc aisément calculer les puissances de f à l'aide d'une division euclidienne de x^n par $P(x)$.

Exercice 2

Soient $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \mathbb{R}_n[x]$ et T_n l'application définie sur E_n par

$$T_n(P)(x) = (nx+1)P(x) + (1-x^2)P'(x).$$

1. Prouver que $T_n \in \mathcal{L}(E_n)$.
2. Ecrire la matrice M_n de T_n dans la base canonique de E_n .
3. Dans le cas où $n = 3$, déterminer des bases de $\ker(T_n)$ et de $\text{Im}(T_n)$.

1. Soit $(P, Q) \in E_n^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a pour tout réel x :

$$\begin{aligned} T_n(\lambda P + Q)(x) &= (nx+1)(\lambda P + Q)(x) + (1-x^2)(\lambda P + Q)'(x) \\ &= (nx+1)(\lambda P(x) + Q(x)) + (1-x^2)(\lambda P'(x) + Q'(x)) \\ &= \lambda((nx+1)P(x) + (1-x^2)P'(x)) + ((nx+1)Q(x) + (1-x^2)Q'(x)) \\ &= \lambda T_n(P)(x) + T_n(Q)(x) \\ &= (\lambda T_n(P) + T_n(Q))(x) \end{aligned}$$

donc $T_n(\lambda P + Q) = \lambda T_n(P) + T_n(Q)$ i.e. T_n est linéaire.

Pour $P(x) = 1$, on a $T_n(P)(x) = nx+1$.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $P(x) = x^k$, alors :

$$\begin{aligned} T_n(P)(x) &= (nx+1)P(x) + (1-x^2)P'(x) \\ &= (nx+1)x^k + (1-x^2)kx^{k-1} \\ &= nx^{k+1} + x^k + kx^{k-1} - kx^{k+1} \\ &= (n-k)x^{k+1} + x^k + kx^{k-1}. \end{aligned}$$

On en déduit que $T_n(P) \in \mathbb{R}_n[x]$ (car pour $k = n$, le coefficient devant x^{n+1} est nul).

Donc $T_n \in \mathcal{L}(E_n)$.

2. La matrice de T_n dans la base canonique de E_n a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ n & 1 & 2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & & & k & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & n-k & & & \\ & & & & & n & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

3. Dans le cas $n = 3$, la matrice est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a (avec pivot de Gauss sur les lignes) :

$$\text{rg}(A) = \cdots = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

donc (avec le théorème du rang) :

$$\dim(\text{Im}(T_3)) = 3 \text{ et } \dim(\ker(T_3)) = 1.$$

Les trois premières colonnes étant linéairement indépendantes (à cause de l'échelonnement des coefficients), on a une base de $\text{Im}(T_3)$:

$$(x \mapsto 1+3x, x \mapsto 1+x+2x^2, x \mapsto 2x+x^2+x^3).$$

On remarque que $C_1 + C_4 = C_2 + C_3$ donc $x \mapsto 1-x-x^2+x^3$ est dans le noyau or ce dernier est de dimension 1 et ce polynôme est non nul donc une base de $\ker(T_3)$ est :

$$(x \mapsto 1-x-x^2+x^3).$$

Exercice 3

1. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel E . On rappelle qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par f si et seulement si $f(F) \subset F$.
 - a. Montrer que $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont des sous-espaces stables par f .
 - b. Soit k est un réel quelconque; montrer que F est un sous-espace vectoriel de E stable par f si et seulement si F est stable par $f - kI$, où I représente l'endomorphisme identité de E .
2. Dans la suite E désigne un espace vectoriel de dimension 4 et $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de E .
Soit f l'endomorphisme de E défini dans la base $\mathcal{E}$ par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On pose $g = f - 2I$.

- a. Calculer g^3 .
- b. Déterminer $\text{Im}(g)$, $\text{Ker}(g)$, $\text{Im}(g) \cap \text{Ker}(g)$, $\text{Im}(g^2)$ et $\text{Ker}(g^2)$.
3. Déterminer toutes les droites vectorielles stables par f .
4. a. Soit P un plan tel que $\text{Im}(g^2) \subset P \subset \text{Ker}(g^2)$. Montrer que P est stable par g .
b. Soit F un plan stable par g et v l'endomorphisme induit par g sur F .
 - i. Montrer que $v^2 = 0$.
 - ii. Si $v = 0$, montrer que $F = \text{Ker } g$.
 - iii. Si $v \neq 0$ et si x est un vecteur de F tel que $v(x) \neq 0$, montrer que $v(x)$ appartient à $\text{Im}(v) \cap \text{Ker}(v)$.
- c. En déduire une caractérisation des plans vectoriels de E stables par f .

1. a. Soit $y \in \text{Im } f$, on a $f(y) \in \text{Im } f$.
Soit $x \in \text{Ker } f$, on a $f(f(x)) = f(0_E) = 0_E$, donc $f(x) \in \text{Ker } f$.
Donc $\boxed{\text{Im } f \text{ et } \text{Ker } f \text{ sont des sous-espaces stables par } f.}$
b. Supposons F stable par f . Soit $x \in F$, alors $f(x) \in F$ donc :

$$(f - k \text{id}_E)(x) = f(x) - kx \in F.$$

Réciproquement, supposons F stable par $f - kI$. Soit $x \in F$ alors $f(x) - kx \in F$ donc

$$f(x) = (f(x) - kx) + kx \in F.$$

Donc $\boxed{F \text{ stable par } f \text{ si et seulement si } F \text{ est stable par } f - k \text{id}_E.}$

2. a. On a A^3 nulle donc $\boxed{g^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}}.$

- b. La matrice de g dans la base $\mathcal{E}$ est :

$$A - 2I_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et les deux premières lignes de cette matrice sont linéairement indépendantes et les deux autres sont nulles donc le rang de cette matrice est 2.

Donc $\boxed{\text{rg}(g) = 2.}$

On en déduit que $\text{Im}(g)$ est de dimension 2 et, par le théorème du rang, $\text{Ker}(g)$ est de dimension 2.

Les colonnes 2 et 3 de g sont linéairement indépendantes donc elles correspondent à une base de $\text{Im}(g)$:

$$\text{Im}(g) = \text{Vect}(-e_1, -2e_1 - e_2) \text{ donc } \boxed{\text{Im}(g) = \text{Vect}(e_1, e_2).}$$

La première colonne est nulle et on a la relation entre les colonnes $c_2 - 2c_3 + c_4 = 0$ donc e_1 et $e_2 - 2e_3 + e_4$ sont dans le noyau or ces deux vecteurs sont linéairement indépendants donc ils forment une base du noyau :

$$\boxed{\text{Ker}(g) = \text{Vect}(e_1, e_2 - 2e_3 + e_4).}$$

On a $e_1 \in \text{Im}(g) \cap \text{Ker}(g)$. Si cette intersection est de dimension 2 alors c'est que l'on a $\text{Im}(g) = \text{Ker}(g)$ donc en particulier g^2 nulle ce qui est contredit par le produit matriciel suivant :

$$(A - 2I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc cette intersection est de dimension 1 et :

$$\boxed{\text{Im } g \cap \text{Ker } g = \text{Vect}(e_1).}$$

La matrice ci-dessus assure que g^2 est de rang 1 donc son image est de dimension 1 et son noyau de dimension 3. L'image de g^2 admet donc pour base un vecteur correspondant (par exemple) à la troisième colonne :

$$\text{Im}(g^2) = \text{Vect}(e_1).$$

D'autre part, les deux premières colonnes étant nulle et puisque l'on a la relation matricielle $2c_3 - c_4 = 0$, on obtient e_1, e_2 et $2e_3 - e_4$ dans le noyau. Ces trois vecteurs étant clairement linéairement indépendants, on a donc :

$$\ker(g^2) = \text{Vect}(e_1, e_2, 2e_3 - e_4).$$

3. D'après la question 1.b., les droites stables par f sont les mêmes que celles stables par g .

Si $D = \text{Vect}(x)$, avec $x \neq 0_E$, est stable par g alors $g(x)$ est colinéaire à x i.e. il existe un réel λ tel que $g(x) = \lambda x$ donc $g^3(x) = \lambda^3 x$ or g^3 est nulle et x est non nul donc on a $\lambda = 0$ donc $g(x) = 0_E$. On a donc $D \subset \ker(g)$.

Réciproquement si $D \subset \ker(g)$ alors $g(D) = \{0_E\} \in D$.

Donc les droites stables par f sont les droites contenues dans $\ker(g)$.

4. a. Soit $x \in P$, alors $x \in \ker g^2$ et $g(x) \in \ker g \cap \text{Im } g$.

Puisque $\ker g \cap \text{Im } g = \text{Im}(g^2)$, on obtient $g(x) \in \text{Im}(g^2)$ donc $g(x) \in P$.

Donc P est stable par g .

b. i. Puisque g^3 est nulle, on a $g^3(x) = 0_E$ pour tout $x \in E$.

On en déduit que, pour tout $x \in F$, $g^3(x) = 0_E$ i.e. $v^3(x) = 0_E$.

Supposons que $v^2 \neq 0_{\mathcal{L}(F)}$ alors il existe x_0 (nécessairement non nul) tel que $v^2(x_0) \neq 0_E$.

Considérons la relations suivantes avec α_0, α_1 et α_2 réels :

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 v(x_0) + \alpha_2 v^2(x_0) = 0_E$$

alors en appliquant v^2 on obtient $\alpha_0 x_0 = 0_E$ avec $x_0 \neq 0_E$ donc $\alpha_0 = 0$.

Puis on applique v , on obtient $\alpha_1 x_1 = 0_E$ avec $x_0 \neq 0_E$ donc $\alpha_1 = 0$.

Enfin, on a $\alpha_2 v^2(x_0) = 0_E$ alors que $v^2(x_0) \neq 0_E$ donc $\alpha_2 = 0$.

Donc la famille $(x_0, v(x_0), v^2(x_0))$ est libre alors que ce sont des vecteurs de F et $\dim(F) = 2$. C'est absurde.

Donc $v^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

ii. Si v est nul alors $F \subset \ker g$ qui est de dimension 2 donc $F = \ker g$.

iii. Si $v \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et si $x \in F$ vérifie $v(x) \neq 0_E$ alors $v(x) \in \text{Im}(v)$.

De plus v^2 est nulle donc $v(x) \in \ker(v)$.

Donc $v(x) \in \text{Im } v \cap \ker v$.

c. La question 4.b.iii. signifie que si v est non nul alors il existe $x \in F$ tel que $v(x)$ soit non nul et dans $\text{Im}(v) \cap \ker(v)$ donc *a fortiori* dans $\text{Im}(g) \cap \ker(g) = \text{Im}(g^2)$ qui est une droite vectorielle donc il s'agit d'une base de cet espace. Il s'ensuit que :

$$\text{Im}(g^2) = \text{Vect}(v(x)) \subset F$$

et comme (4.b.iii.) v^2 est nul, on a clairement $F \subset \ker(v^2) \subset \ker(g^2)$.

En tenant compte de (4.b.ii.), on a donc dans tous les cas

$$\text{Im}(g^2) \subset F \subset \ker(g^2).$$

Avec la question 4.a. on a la réciproque donc un plan P est stable par g si et seulement si $\text{Im } g^2 \subset P \subset \ker g^2$. D'où, d'après la question 1.b.,

un plan P est stable par f si et seulement si $\text{Im } g^2 \subset P \subset \ker g^2$.