

Notions abordées et objectifs

► Algèbre linéaire

- Réviser tout le programme de première année.
- Notion de somme directe de $k \geq 2$ sous-espaces vectoriels.
- Notion de trace d'une matrice, propriétés.
- Changement de bases.

► Note aux colleurs :

- Éviter, si possible, de proposer la résolution d'un système linéaire avec paramètre : c'est chronophage et ce sera de toute façon pratiqué bientôt avec l'étude des éléments propres.
- Les longueurs des exercices de cours sont inégales, ne pas hésiter à en poser plusieurs.

► Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :

1. Soit $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ une famille libre de $\mathbb{R}^n$. On pose $b_k = a_k - a_p$ pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$. Montrer que $(b_1, \dots, b_{p-1})$ est également une famille libre de $\mathbb{R}^n$.

2. Soit $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) ; f(0) = f'(0) = 0\}$ et :

$$G = \{x \mapsto ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3. Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et u et v deux applications linéaires de E dans F . Montrer que :

$$\text{rg}(u + v) \leq \text{rg } u + \text{rg } v.$$

4. Soit E un espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E qui commutent. Montrer que $\ker f$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par g .

5. On considère une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $n+1$ réels $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$ de l'intervalle $[a, b]$. En considérant l'application :

$$\varphi : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, P \mapsto (P(\alpha_0), P(\alpha_1), \dots, P(\alpha_n)),$$

montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que pour tout entier i compris entre 0 et n , $P(\alpha_i) = f(\alpha_i)$.

6. Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$, posons : $\varphi_1(P) = P(1)$, $\varphi_2(P) = P(0)$, $\varphi_3(P) = P(-1)$ et $\psi(P) = \int_{-1}^1 P(t)dt$. On admet que les quatre applications ainsi définies sont des formes linéaires de $\mathbb{R}_2[x]$.

a. Justifier que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R})$.

b. Justifier l'existence de λ_1, λ_2 et λ_3 réels tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$,

$$\int_{-1}^1 P(t)dt = \lambda_1 P(1) + \lambda_2 P(0) + \lambda_3 P(-1).$$

Calculer ensuite les valeurs de λ_1, λ_2 et λ_3 .

7. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que les sous-espaces vectoriels $\ker(\varphi)$, $\ker(\varphi - \text{id}_E)$ et $\ker(\varphi + \text{id}_E)$ sont en somme directe.

8. a. Quelles matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifient la relation $\text{tr}(A^t A) = 0$?

b. À quelle condition sur des matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, a-t-on :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{tr}(AX) = \text{tr}(BX)?$$

9. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit l'application $\Phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ par $\Phi_A(X) = \text{tr}(AX)$.

a. Montrer que Φ_A est une forme linéaire.

b. Montrer la linéarité de l'application $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}), A \mapsto \Phi_A$.

c. Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, justifier qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi = \Phi_A$.