

Notions abordées et objectifs

► Algèbre linéaire

- Réviser tout le programme de première année.
- Notion de somme directe de $k \geq 2$ sous-espaces vectoriels.
- Notion de trace d'une matrice, propriétés.
- Changement de bases.
- Polynômes annulateurs.
- Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres.
- Notion d'endomorphisme ou de matrice diagonalisable.
- Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité (sous-espaces propres supplémentaires, somme des dimensions des sous-espaces propres).
- Condition suffisante de diagonalisabilité (n valeurs propres distinctes avec E de dimension n , ou n valeurs propres distinctes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

► Note aux colleurs :

- Les longueurs des exercices de cours sont inégales, ne pas hésiter à en poser plusieurs.
- Le programme limite les notions d'éléments propres au cas de la dimension finie.

► Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $u \in E$, les vecteurs u et $f(u)$ soient liés. Montrer que f est une homothétie (*i.e.* il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda \text{id}_E$).
2. Montrer que toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet un polynôme annulateur.
3. On considère $n \geq 2$ et $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M \mapsto {}^t M$. Déterminer un polynôme annulateur de φ et en déduire les valeurs propres de φ .
4. Soit A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - a. Montrer que $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B)$ et que les sous-espaces propres de A et B ont même dimension.
 - b. Montrer que tout polynôme annulateur de A est annulateur de B .
5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Montrer que $\text{Sp}(A) = \{0\}$.
6. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont les éléments diagonaux.
7. Pour tout t réel, on considère la matrice $M(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}$.
 - a. Déterminer les valeurs propres de la matrice $M(t)$ en fonction de la valeur de t .
 - b. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ est diagonalisable.