# TD 1 – Systèmes linéaires, matrices – calculs

***Exercice 1-10***

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En utilisant les mêmes notations que ci-dessus concernant les matrices $E_{i,j}$, calculer pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ les produits :

$$AE_{i,i} \qquad E_{i,i}A \qquad A(E_{i,j}+E_{j,i}) \qquad (E_{i,j}+E_{j,i})A.$$

2. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**1.** Soit $(r,s) \in [\![1,n]\!]^2$, alors :

$$\begin{aligned} AE_{i,j}[r,s] &= \sum_{k=1}^{n} A[r,k]E_{i,j}[k,s] \\ &= \sum_{k=1}^{n} A[r,k]\delta_{i,k}\delta_{j,s} \\ &= A[r,i]\delta_{j,s} \\ &= \begin{cases} A[r,i] & \text{si } j = s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{i,j}A[r,s] &= \sum_{k=1}^{n} E_{i,j}[r,k]A[k,s] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,r}\delta_{j,k}A[k,s] \\ &= A[j,s]\delta_{i,r} \\ &= \begin{cases} A[j,s] & \text{si } i = r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$AE_{i,i}[r,s] = \begin{cases} A[r,i] & \text{si } i = s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad E_{i,i}A[r,s] = \begin{cases} A[i,s] & \text{si } i = r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Donc $AE_{i,i}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf la $i$-ème colonne qui est la $i$-ème colonne de A, et $E_{i,i}A$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf la $i$-ème ligne qui est la $i$-ème ligne de A.
D'autre part pour $i \neq j$ :

$$A(E_{i,j}+E_{j,i})[r,s] = \begin{cases} A[r,i] & \text{si } j = s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} + \begin{cases} A[r,j] & \text{si } i = s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc $A(E_{i,j}+E_{j,i})$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf les $i$-ème et $j$-ème colonnes qui sont respectivement les $j$-ème et $i$-ème colonnes de A.
De même, $(E_{i,j}+E_{j,i})A$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf les $i$-ème et $j$-ème lignes qui sont respectivement les $j$-ème et $i$-ème lignes de A.

**2.** Supposons que A commute avec toutes les matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors, en particulier, A avec les matrices de la forme $E_{i,j}+E_{j,i}$. Considérons donc $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a :

$$A(E_{i,j}+E_{j,i})[i,j] = (E_{i,j}+E_{j,i})A[i,j] \ \ \textit{i.e.} \ \ A[i,i] = A[j,j].$$

D'autre part :

$$AE_{i,i}[i,j] = E_{i,i}A[i,j] \ \ \textit{i.e.} \ \ 0 = A[i,j].$$

On en déduit que A est de la forme $\lambda I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
La réciproque est évidente.
Donc les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont les matrices $\lambda I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

***Exercice 1-12***

Déterminer, en fonction des paramètres, les rangs des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \ddots & b \\ b & (0) & & a \end{pmatrix}$$

(où B est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

► Pour la matrice A, on comment par $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & a-b & a-c \\ bc & c(a-b) & b(a-c) \end{pmatrix}.$$

• Si $a = b = c$ alors :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

• Si $a = c$ et $a \neq b$ alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & a-b & 0 \\ bc & a(a-b) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & 1 & 0 \\ bc & a & 0 \end{pmatrix} &= 2. \end{aligned}$$

• Si $a = b$ et $a \neq c$ alors c'est analogue et $\mathrm{rg}(A) = 2$. De même si $b = c$ et $b \neq a$.
• Le dernier cas est celui où $a$, $b$ et $c$ sont tous distincts :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 1 \\ bc & c & b \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ bc & c & b-c \end{pmatrix} \\ &= 3. \end{aligned}$$

En résumé, $\mathrm{rg}(A)$ correspond au cardinal de l'ensemble $\{a, b, c\}$.

► Pour la matrice B, on peut commencer par le cas où $a = 0$, alors :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \ddots & b \\ b & (0) & & 0 \end{pmatrix}$$

donc B est nulle pour $b = 0$ et de rang $n$ pour $b \neq 0$.

On suppose désormais que $a \neq 0$ et on effectue successivement les opérations :

$$C_2 \leftarrow aC_2 - bC_1,\ C_3 \leftarrow a^2C_3 - bC_2,\ C_4 \leftarrow a^3C_4 - bC_3, \ldots$$

de sorte que :

$$\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & a & 0 \\ b & & & a^n - (-1)^n b \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{rg}(B) = n$ lorsque $a^n \neq (-b)^n$ et $\mathrm{rg}(B) = n - 1$ sinon.