TD 1 – Systèmes linéaires, matrices – calculs

Résolution de systèmes linéaires

Exercice 1-1

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} x+2y-z=-3 \\ 2x-y+z=8 \\ 3x+y+2z=11 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} a-b-c=-7 \\ 3a+2b-c=3 \\ 4a+b+2c=4 \end{cases}$$

$$(S_3) : \begin{cases} x+3y+z=1 \\ 2x-y+2z=-1 \\ x+10y+z=0 \end{cases} \qquad (S_4) : \begin{cases} 3x+2y+3z=0 \\ 2x-y+2z=-1 \\ 4x+5y+4z=1 \end{cases} \qquad (S_5) : \begin{cases} x+2y+z=1 \\ 3x+y-2z=3 \end{cases}$$

Exercice 1-2

On considère le système d'inconnues x, y et z et de paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+az=2 \\ 2x+ay+2z=3. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs suivantes de a :

$$a=0 \qquad a=-2 \qquad a=3 \qquad a \in \mathbb{R} \setminus \{-2,3\}.$$

Calculs matriciels explicites

Exercice 1-3

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer les matrices :

$$A+2B \qquad AB \qquad A^2 \qquad {}^tBB.$$

Exercice 1-4

Calculer les puissances des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1-5

Calculer l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1-6

Calculer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculs matriciels formels

Exercice 1-7

Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure et préciser les éléments diagonaux.

Exercice 1-8

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Montrer que ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

Exercice 1-9

Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice dont le seul coefficient non nul est celui à l'emplacement (i, j) qui est égal à 1.
Déterminer le produit $E_{i,j}E_{k,l}$ où $(i, j, k, l) \in [\![1, n]\!]^4$.

Exercice 1-10

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En utilisant les mêmes notations que ci-dessus concernant les matrices $E_{i,j}$, calculer pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ les produits :

$$AE_{i,i} \qquad E_{i,i}A \qquad A(E_{i,j} + E_{j,i}) \qquad (E_{i,j} + E_{j,i})A.$$

2. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1-11

On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients valent tous 1.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer la matrice JAJ.

Exercice 1-12

Déterminer, en fonction des paramètres, les rangs des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \ddots & b \\ b & (0) & & a \end{pmatrix}$$

(où B est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

⇨ Réviser les manipulations matricielles avec Python et le module `numpy`.