TD 2 – Algèbre linéaire

Exercice 2-1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on définit :

$$F_i = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[x] \mid \forall j \in [\![0,n]\!] \backslash \{i\}, P(j) = 0 \right\}.$$

1. Justifier que, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $F_i = \mathrm{Vect}(L_i)$ où $L_i = \displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x-j)$.

2. Vérifier que la somme $F_0 + F_1 + \cdots + F_n$ est directe, puis l'égalité $\displaystyle\bigoplus_{i=0}^{n} F_i = \mathbb{R}_n[x]$.

Exercice 2-2

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.
Montrer que $\mathrm{rg}(g) \leqslant 2$ puis en déduire que $g \circ f$ n'est ni injective, ni surjective.

Exercice 2-3

Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$, posons : $\varphi_1(P) = P(1)$, $\varphi_2(P) = P(0)$, $\varphi_3(P) = P(-1)$ et $\psi(P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t$.

1. Justifier que φ_1 et ψ sont des formes linéaires de $\mathbb{R}_2[x]$.
On admet que φ_2 et φ_3 sont elles-aussi des formes linéaires.

2. Justifier que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R})$.

3. Justifier l'existence de λ_1, λ_2 et λ_3 réels tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$,

$$\int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t = \lambda_1 P(1) + \lambda_2 P(0) + \lambda_3 P(-1).$$

4. Préciser les valeurs de λ_1, λ_2 et λ_3.

Exercice 2-4

Soit $E_1, \ldots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n = E$.
Pour tout i, on note p_i le projecteur sur E_i parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{j \neq i} E_j$.

Montrer que $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$ si $i \neq j$ et que :

$$p_1 + \cdots + p_n = \mathrm{id}_E.$$

Exercice 2-5

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que

$$E = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g \quad \text{et} \quad E = \ker f + \ker g.$$

Montrer que ces sommes sont directes.

Exercice 2-6

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que les sous-espaces vectoriels $\ker(\varphi)$, $\ker(\varphi - \mathrm{id}_E)$ et $\ker(\varphi + \mathrm{id}_E)$ sont en somme directe.

Exercice 2-7

Calculer les noyaux des matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B_\alpha = \begin{bmatrix} 2-\alpha & 3 & 1 \\ 5 & 6+\alpha & 1 \\ 1 & 1 & -2-\alpha \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2-8

On considère la base canonique $\mathcal{B} = \left(1, x, x^2\right)$ de $\mathbb{R}_2[x]$ (avec un abus de notation). Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$. On considère les familles de polynômes $\mathcal{C} = \left(1, x-a, (x-a)^2\right)$ et $\mathcal{D} = \left((x-a)^2, (x-a)(x-b), (x-b)^2\right)$.

1. Justifier que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont deux autres bases de $\mathbb{R}_2[x]$.

2. Calculer $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}, P_{\mathcal{B},\mathcal{D}}$ et $P_{\mathcal{C},\mathcal{D}}$.
Vérifier par le calcul que $P_{\mathcal{B},\mathcal{D}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot P_{\mathcal{C},\mathcal{D}}$.

3. Prouver la relation $P_{\mathcal{B},\mathcal{D}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot P_{\mathcal{C},\mathcal{D}}$ dans le cas général de trois bases $\mathcal{B},\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ de E.

Exercice 2-9

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et on en note $\mathcal{C}$ la base canonique. On considère le plan vectoriel $\mathcal{P}$ d'équation $2x - y - z = 0$ et la droite vectorielle $\mathcal{D} = \text{Vect}(u)$ où $u = (1, -1, 1)$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = \mathcal{P} \oplus \mathcal{D}$.

2. Soit $\mathcal{B}$, une base adaptée à la décomposition précédente et p le projecteur sur $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{D}$. Préciser la matrice $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$.

3. Expliciter la matrice de passage entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ puis en déduire la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(p)$.

Exercice 2-10

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $A^2 = 0$.

1. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Déterminer la dimension de $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

Exercice 2-11

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{tr}\left((AB)^k\right) = \text{tr}\left((BA)^k\right)$.

Exercice 2-12

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

1. Que peut-on dire de A si $\text{tr}\left(A\,{}^tA\right) = 0$?

2. Que peut-on dire de A et B si pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{tr}(AX) = \text{tr}(BX)$?

Exercice 2-13

Peut-on trouver deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$?

Exercice 2-14

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle telle que $\text{tr}(A) = 0$ et φ son endomorphisme canoniquement associé.

1. Justifier qu'il existe $x \in \mathbb{R}^2$ tel que la famille $(x, \varphi(x))$ soit libre.

2. En déduire que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Exercice 2-15

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E . On définit la trace de φ par :

$$\mathrm{tr}(\varphi) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)\right).$$

1. Justifier que la trace de φ ne dépend pas du choix de la base.

2. Exemples–

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la trace de φ où $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto P - P' \in \mathbb{R}_n[x]$.

b. On pose $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A \mapsto {}^tA$.
Justifier que le sous-espace des matrices symétriques de taille (n,n) (noté $\mathcal{S}_n$) et celui des matrices antisymétriques (noté $\mathcal{A}_n$) sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Préciser les dimensions.
En déduire la trace de φ.

c. Soit p un projecteur de E de dimension finie. Vérifier que la trace d'un projecteur d'un espace vectoriel de dimension finie est égale à son rang.

Exercice 2-16

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit l'application $\Phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ par $\Phi_A(X) = \mathrm{tr}(AX)$.

1. Montrer que Φ_A est une forme linéaire.

2. Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, justifier qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi = \Phi_A$.

Sous-espaces stables

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et F une partie de E. On dit que F est une ***partie stable*** par φ lorsque :

$$\forall u \in F, \quad \varphi(u) \in F.$$

Exemple

Soit $\varphi : \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}), f \mapsto f'$.
Les espaces $\mathbb{R}[x]$ et $\mathrm{Vect}(\cos,\sin)$ sont des parties stables par φ.

Si F est un sous-espace vectoriel stable par φ, alors on peut définir la restriction de φ à F par :

$$\varphi_{|F} : F \to F, u \mapsto \varphi(u).$$

L'application $\varphi_{|F}$ définit alors un endomorphisme de F.

Exercice 2-17

Montrer que toute somme de sous-espaces stables par φ reste stable par φ.

Exercice 2-18

Soit φ et ψ dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.
Montrer que le noyau et l'image de ψ sont stables par φ.

Exercice 2-19

Soit F un sous-espace vectoriel de E avec $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille génératrice de F.
Montrer que F est une partie stable par φ si et seulement si, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\varphi(e_i) \in F$.

Exercice 2-20

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ injectif et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E stable par φ. Montrer que l'endomorphisme induit par φ sur F est un isomorphisme.

Exercice 2-21

Soit u un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$.

1. On suppose que $u^2=0$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Déterminer alors les sous-espaces vectoriels F de $\mathbb{R}^3$ stables par u, c'est à dire tels que $u(\mathrm{F})\subset \mathrm{F}$.

2. On suppose que $u^2\neq 0$ et $u^3=0$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est :

$$\mathrm{B}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Déterminer alors les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par u.

Utilisation de Python

Exercice 2-22

Écrire un programme Python qui compte le nombre de matrices non inversibles parmi les matrices de tailles (25,25) de la forme suivante :

$$\mathrm{M}(a,b)=\begin{bmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{bmatrix} \text{ avec } -50\leqslant a,b\leqslant 50.$$

On pourra utiliser les commandes `np.ones([n,p])` (qui renvoie une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ne contenant que des 1), `np.eye(n)` (pour la matrice I_n) et `np.linalg.matrixrank(A)` pour le rang de la matrice A.

Exercice 2-23

1. Compléter le programme suivant qui prend en argument une matrice A et renvoie sa transposée.

```
def transpo(A):
    [n,p]=np.shape(A)
    B=np.zeros( ...)
    for i in ... :
        for j in ... :
            B[...,...]=
    return B
```

2. On appelle *antitransposée* d'une matrice carrée A, la matrice C obtenue par symétrie par rapport à l'antidiagonale. Par exemple :

$$\mathrm{A}_0=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{C}_0=\begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 8 & 5 & 2 \\ 7 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Comment modifier le programme précédent pour obtenir un nouveau programme qui prend en argument une matrice A et qui renvoie son antitransposée.