**Exercice 2-15**

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E . On définit la trace de $\varphi$ par :

$$\operatorname{tr}(\varphi) = \operatorname{tr}\left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)\right).$$

**1.** Justifier que la trace de $\varphi$ ne dépend pas du choix de la base.

**2.** Exemples–

***a.*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la trace de $\varphi$ où $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto P - P' \in \mathbb{R}_n[x]$.

***b.*** On pose $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A \mapsto {}^tA$.
Justifier que le sous-espace des matrices symétriques de taille $(n,n)$ (noté $\mathcal{S}_n$) et celui des matrices antisymétriques (noté $\mathcal{A}_n$) sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Préciser les dimensions.
En déduire la trace de $\varphi$.

***c.*** Soit $p$ un projecteur de E de dimension finie. Vérifier que la trace d'un projecteur d'un espace vectoriel de dimension finie est égale à son rang.

**1.** Si A et B représentent $\varphi$ alors il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$ d'où :

$$\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(AP \times P^{-1}) = \operatorname{tr}(A).$$

**2.** ***a.*** L'image de $x \mapsto 1$ par $\varphi$ est $x \mapsto 1$.
Pour $k \geqslant 1$, l'image de $x \mapsto x^k$ par $\varphi$ est $x \mapsto x^k - kx^{-1}$.
Il s'ensuit que la matrice de $\varphi$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ est triangulaire supérieure avec que des 1 sur la diagonale.
Donc $\operatorname{tr}(\varphi) = n + 1$.

***b.*** On a vu en cours que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de façon unique $A = M + N$, avec :

$$M = \frac{1}{2}(A + {}^tA) \in \mathcal{S}_n \quad \text{et} \quad N = \frac{1}{2}(A - {}^tA) \in \mathcal{A}_n.$$

Les dimensions de $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont respectivement $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$.
La matrice de l'application $A \mapsto {}^tA$ dans une base adaptée à cette somme directe est donc une matrice diagonale avec $\frac{n(n+1)}{2}$ coefficients 1 et $\frac{n(n-1)}{2}$ coefficients $-1$.
Donc la trace de cette application est :

$$\frac{n(n+1)}{2} \times 1 + \frac{n(n-1)}{2} \times (-1) = n.$$

***c.*** Dans une base adaptée à la somme directe $E = \operatorname{Im}(p) \oplus \ker(p)$, la matrice est diagonale avec des 1 et des 0 sur la diagonale : le nombre de 0 correspondant à la dimension de $\ker(p)$ donc $\operatorname{tr}(p)$ correspond à la dimension de $\operatorname{Im}(p)$ *i.e.* au rang de $p$.

**Exercice 2-17**

Montrer que toute somme de sous-espaces stables par $\varphi$ reste stable par $\varphi$.

Soit $F_1, \ldots, F_k$ des s.e.v. de E et $F = F_1 + \cdots + F_k$.
Soit $x \in F$, on écrit $x = x_1 + \cdots + x_k$ avec, pour tout $i$, $x_i \in F_i$.
Alors $\varphi(x) = \varphi(x_1) + \cdots + \varphi(x_k)$.
Pour tout $i$, on a $\varphi(F_i) \subset F_i$ donc $\varphi(x_i) \in F_i$.
Donc $\varphi(x) \in F_1 + \cdots + F_k$.
Donc $\varphi(F) \subset F$.

**Exercice 2-19**

Soit F un sous-espace vectoriel de E avec $(e_1,\dots,e_p)$ une famille génératrice de F.
Montrer que F est une partie stable par $\varphi$ si et seulement si, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\varphi(e_i) \in \mathrm{F}$.

• Supposons F stable par $\varphi$ et considérons $i \in [\![1,p]\!]$.
On a $e_i \in \mathrm{F}$ donc $\varphi(e_i) \in \mathrm{F}$.
• On suppose que, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\varphi(e_i) \in \mathrm{F}$.
Soit $x \in \mathrm{F}$, il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p$.
Alors $\varphi(x) = \lambda_1\varphi(e_1) + \cdots + \lambda_p\varphi(e_p) \in \mathrm{F}$.
Donc F est stable par $\varphi$.

**Exercice 2-20**

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ injectif et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E stable par $\varphi$. Montrer que l'endomorphisme induit par $\varphi$ sur F est un isomorphisme.

L'endomorphisme induit par $\varphi$ sur F est l'application :

$$\psi : \mathrm{F} \to \mathrm{F}, x \mapsto \psi(x) = \varphi(x).$$

Soit $x \in \ker(\psi)$ alors $\psi(x) = 0_{\mathrm{E}}$ donc $\varphi(x) = 0_{\mathrm{E}}$ et l'injectivité de $\varphi$ montre que $x = 0_{\mathrm{E}}$.
Donc $\psi$ est injective or il s'agit d'un endomorphisme en dimension finie donc $\psi$ est bijective.