# TD 3 – Suites

## Suites définies implicitement

***Exercice 3-1***

Pour tout entier $p \geqslant 3$ et tout réel $x \in [0,1]$, on pose :

$$f_p(x) = x^p - px + 1.$$

1. ***a.*** Définir en python une fonction `f(p,x)` correspondant à la fonction $f_p$ définie ci-dessus.
   ***b.*** Donner les instructions permettant de représenter sur un même dessin les fonctions $f_3$, $f_4$ et $f_5$ sur l'intervalle $[0,1]$.
2. Étudier les variations de $f_p$ sur $[0,1]$.
3. En déduire que l'équation $f_p(x) = 0$ admet une et une seule solution dans $]0,1[$.
   On note $x_p$ cette solution de sorte que :
   $$\forall p \geqslant 3,\ (x_p)^p = px_p - 1.$$
4. Montrer que :
   $$f_{p+1}(x_p) = (x_p)^{p+1} - (x_p)^p - x_p,$$
   puis en déduire que $f_{p+1}(x_p) < 0$.
5. En déduire le sens de variation de la suite $(x_p)$ puis qu'elle converge.
6. Montrer que la limite de la suite $(x_p^p)$ est 0.
7. En déduire que : $x_p \sim \frac{1}{p}$.
8. On cherche à déterminer un équivalent de $x_p - \frac{1}{p}$.
   Pour tout $p \geqslant 3$, on pose : $\varepsilon_p = px_p - 1$.
   ***a.*** Justifier que, pour tout $p \geqslant 3$, on a : $\varepsilon_p > 0$ et $\varepsilon_p = \frac{(1+\varepsilon_p)^p}{p^p}$.
   ***b.*** En déduire que : $0 < \varepsilon_p \leqslant \left(\frac{2}{p}\right)^p$ à partir d'un certain rang.
   ***c.*** Montrer que $\left(1+\varepsilon_p\right)^p$ a pour limite 1.
   *Indication :* on pourra utiliser le fait que $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x > -1$.
   ***d.*** En déduire un équivalent de $\varepsilon_p$, puis un équivalent de $x_p - \frac{1}{p}$.

***Exercice 3-2***

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction :
   $$f_n : ]0,+\infty[ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x - n + \frac{n}{2}\ln(x).$$
   Étudier les variations et les limites de la fonction $f_n$ (on ne demande pas de représentation graphique).
2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $\alpha_n$ vérifiant $f_n(\alpha_n) = 0$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $1 \leqslant \alpha_n \leqslant e^2$.
4. Exprimer $\ln(\alpha_n)$ sous la forme $p_n + q_n\alpha_n$ avec $p_n$ et $q_n$ des fractions dépendant de $n$.
5. Que peut-on dire du réel $f_{n+1}(\alpha_n)$ ?
6. En déduire la monotonie de la suite $(\alpha_n)$.
7. Montrer que la suite $(\alpha_n)$ converge puis déterminer sa limite.

# Lemme de Cesàro et applications

**Lemme de Cesàro**

Si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

***Démonstration —***

Tout d'abord, on remarque que pour tout entier $n$, on a :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k\right) - \ell &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ell \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - \ell),\end{aligned}$$

d'où, par inégalité triangulaire :

$$\left|\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k\right) - \ell\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |a_k - \ell|.$$

Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ell$, il existe un entier $n_0$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ |a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit pour tout $n \geqslant n_0$ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n-1} |a_k - \ell| &< \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{n-n_0}{n}\,\frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

D'autre part, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k - \ell|$ est une constante donc :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

et on en déduit qu'il existe un entier $n_1$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_1,\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$, alors pour tout $n \geqslant n_2$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |a_k - \ell| &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k - \ell| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n-1} |a_k - \ell| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall n \geqslant n_2,\ \left|\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k\right) - \ell\right| < \varepsilon.$$

On a donc bien :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

▹ Notons que le résultat est également vrai en remplaçant $\ell$ par $+\infty$ ou $-\infty$.

***Exercice 3-3***

On considère une suite $u$ définie par son premier terme, vérifiant $u_0 > 1$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 1$.
2. Étudier la monotonie de la suite $u$.
3. Montrer que la suite $u$ diverge vers $+\infty$.
   *Indication :* on pourra par exemple raisonner par l'absurde.
4. Justifier le fait que : $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-u_n}} - 1 \sim \mathrm{e}^{-u_n}$.
5. En déduire la limite de : $\mathrm{e}^{u_{n+1}} - \mathrm{e}^{u_n}$.
6. En exploitant le lemme de Cesàro, montrer que : $\mathrm{e}^{u_n - \ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
7. En déduire : $u_n \sim \ln(n)$.

**Exercice 3-4**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 2$, $u_2 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geqslant 2,\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n\sqrt{u_n u_{n-1}}}.$$

**1.** Vérifier, à l'aide d'une récurrence (avec hypothèse double) que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement positive (ce qui assure notamment qu'elle est correctement définie).

**2.** Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

**3.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

**4.** Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_{n-1}}{u_n}\right)$ converge et déterminer sa limite.

**5.** Prouver que la suite $\left(\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}\right)$ converge vers 2.

**6.** En utilisant le lemme de Cesàro et le résultat de la question précédente, montrer que $u_n$ est équivalent à $\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.

**Exercice 3-5**

**1.** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}.$$

*a.* Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

*b.* Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

*c.* Montrer alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

*d.* Écrire une fonction Python, d'argument $n$, qui renvoie la valeur de $u_n$.

**2.** Soit $\beta$ un réel non nul.

*a.* Établir l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}^{\beta} - u_n^{\beta} = \left(\left(1 + \frac{1}{u_n^3}\right)^{\beta} - 1\right) \times u_n^{\beta}.$$

*b.* En déduire que :

$$u_{n+1}^{\beta} - u_n^{\beta} \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta u_n^{\beta-3}.$$

*c.* Montrer que la suite $\left(u_{n+1}^{\beta} - u_n^{\beta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie non nulle si et seulement si $\beta = 3$.

**3.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n = u_{n+1}^3 - u_n^3$.

*a.* Déterminer la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

*b.* Montrer que : $\dfrac{u_n^3}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$.

*c.* En déduire un équivalent de $u_n$.

# Encore une suite définie par une relation de récurrence...

***Exercice 3-6***

Soit $r$ un réel positif. On s'intéresse aux suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + r^n u_n.$$

**1.** Que peut-on dire de la suite $u$ quand $r = 0$ ?

**2.** Dans cette question, on suppose que $r = 1$.

***a.*** Expliciter $u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

***b.*** On suppose que $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, déterminer la limite de la suite $u$.

***c.*** Existe-t-il des valeurs de $u_0$ et $u_1$ telles que la suite $u$ converge ?

**3.** Dans cette question, on suppose que $r \geqslant 1$, $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$.
À l'aide d'un raisonnement par récurrence (double), montrer que la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : \text{ «} u_n > 0 \text{ et } u_n \geqslant (n-1)u_1 \text{»}$$

est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.
Que peut-on en déduire sur la convergence de la suite $u$ ?

**4.** Dans cette question, on suppose que $0 < r < 1$, $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$. On considère la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$v_1 = u_1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} = \left(1 + r^{n-1}\right)v_n.$$

***a.*** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$v_{n+2} = v_1 \prod_{k=0}^{n} \left(1 + r^k\right).$$

***b.*** Montrer que pout tout réel $x > -1$, on a :

$$\ln(1 + x) \leqslant x.$$

***c.*** Étudier la monotonie et la convergence de la suite $\left(\ln(v_n)\right)$.

***d.*** La suite $v$ converge-t-elle ?

***e.*** Comparer $u_n$ et $v_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire la nature de la suite $u$.