Matrices dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres

Dans tout ce problème, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées possédant n lignes et n colonnes dont les coefficients sont réels. On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes :

(Δ_1) les coefficients diagonaux $m_{1,1}$, ..., $m_{n,n}$ de la matrice M sont des valeurs propres de M ;

(Δ_2) la matrice M n'a pas d'autres valeurs propres que les nombres $m_{1,1}$, ..., $m_{n,n}$.

Partie I. Généralités et exemples

1. Montrer que toutes les matrices triangulaires supérieures et toutes les matrices triangulaires inférieures de$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartiennent à $\mathcal{D}_n$.

2. Si M est une matrice de $\mathcal{D}_n$, établir que pour tout α réel, la matrice $\mathrm{M}+\alpha\mathrm{I}_n$ est encore un élément de $\mathcal{D}_n$.

3. On note K_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

a. Montrer que la matrice K_n n'appartient pas à $\mathcal{D}_n$.

b. L'ensemble $\mathcal{D}_n$ est-il un sous espace-vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

4. *a.* Soit (x, y, z) un élément de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si les nombres x et y sont non nuls.

b. En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_2$ ne contient pas d'autre élément que les matrices triangulaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5. Montrer que la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{D}_3$.

Cette matrice est-elle diagonalisable ?

6. Pour tout t réel, on considère la matrice $\mathrm{M}(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}$.

a. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de la matrice $\mathrm{M}(t)$ selon la valeur de t.
En déduire les valeurs de t pour lesquelles la matrice $\mathrm{M}(t)$ appartient à $\mathcal{D}_3$.

b. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la matrice $\mathrm{M}(t)$ est diagonalisable.

Partie II. Matrices nilpotentes

Une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est *nilpotente* si, et seulement si, il existe un entier naturel p non nul tel que la matrice M^p soit la matrice nulle.

7. Soit M une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Montrer que 0 est une valeur propre de M et que c'est la seule valeur propre de M.

8. Soit M une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On va prouver par l'absurde que M^3 est la matrice nulle. Pour cela, on suppose que M^3 n'est pas la matrice nulle.
Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice M dans la base $\mathcal{B}$.

a. Montrer les inclusions $\ker(u) \subset \ker(u^2)$ et $\ker(u^2) \subset \ker(u^3)$.

b. Montrer que les noyaux $\ker(u^2)$ et $\ker(u^3)$ ne peuvent pas être égaux. Pour cela, montrer que dans le cas contraire, le noyau de u^2 est égal à celui de u^i pour tout entier i supérieur ou égal à 2, et en tirer une contradiction.

c. Montrer que les noyaux $\ker(u)$ et $\ker(u^2)$ ne peuvent pas être égaux non plus.

d. Conclure en considérant la dimension des noyaux mentionnés ci-dessus.

9. Soit (a, b, c, d, e, f) un élément de $\mathbb{R}^6$. On considère la matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On définit les réels $\gamma(\mathrm{M}) = ac + df + be$ et $\delta(\mathrm{M}) = bcf + ade$.

a. Établir l'égalité $\mathrm{M}^3 = \gamma(\mathrm{M})\mathrm{M} + \delta(\mathrm{M})\mathrm{I}_3$.

b. Montrer que la matrice M est nilpotente si et seulement si $\gamma(\mathrm{M})$ et $\delta(\mathrm{M})$ sont nuls.

c. On suppose que a, b et d sont égaux à 1.
Justifier qu'il existe une infinité de choix pour le triplet (c, e, f) de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels la matrice M est nilpotente.

d. En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_3$ contient une infinité de matrices nilpotentes qui ne sont pas triangulaires.

e. Exhiber une matrice de $\mathcal{D}_3$ dont tous les coefficients sont non nuls.