# TD 4 – Problème d'algèbre linéaire

ÉLÉMENTS DE CORRECTION –
**Attention** il s'agit d'un corrigé trouvé sur Internet, je ne suis pas nécessairement d'accord avec toute la rédaction.

**8.** ***a.*** Si $x \in \ker(u)$ alors $u(u(x)) = u(0_E) = 0_E$ donc $x \in \ker(u^2)$.
De même si $x \in \ker(u^2)$ alors $u^3(x) = u(u^2(x)) = u(0_E) = 0_E$ donc $x \in \ker(u^3)$.
On a donc $\boxed{\ker(u) \subset \ker(u^2) \text{ et } \ker(u^2) \subset \ker(u^3).}$

***b.*** Si $\ker(u^2) = \ker(u^3)$ alors par récurrence, pour $i \geqslant 2$ :
Si $\ker\left(u^i\right) = \ker\left(u^2\right)$, pour $x \in \ker\left(u^{i+1}\right)$ on a $0 = u^{i+1}(x) = u^3\left(u^{i-2}(x)\right)$ donc $u^{i-2}(x) \in \ker\left(u^3\right) = \ker\left(u^2\right)$ donc $u^2\left(u^{i-2}(x)\right) = 0$ et $u^i(x) = 0$. Donc $x \in \ker\left(u^i\right)$
Alors $\ker\left(u^{i+1}\right) \subset \ker\left(u^i\right)$ et l'inclusion réciproque étant toujours vraie (cf a ) donc $\ker\left(u^{i+1}\right) = \ker\left(u^i\right) = \ker\left(u^2\right)$

*Conclusion :* $\boxed{\text{Si } \ker(u^2) = \ker\left(u^3\right) \text{ alors pour tout } i \geq 2 : \ker(u^i) = \ker\left(u^2\right)}$

On a supposé que $M^3 \neq 0$ donc $M^2 \neq 0$ et $\ker\left(u^2\right) \neq \mathbb{R}^3$.
Donc pour tout entier $i$ : $\ker(u^i) \neq \mathbb{R}^3$ et donc $u^i \neq 0$ et enfin $M^i \neq 0$ et finalement

*Conclusion :* $\boxed{\text{Si } \ker(u^2) = \ker\left(u^3\right) \text{ alors M n'est pas nilpotente donc } \ker(u^2) \neq \ker\left(u^3\right)}$

***c.*** De même si $\ker(u) = \ker(u^2)$ alors (récurrence) pour tout $i$ : $\ker(u^i) = \ker(u)$ et M n'est pas nilpotente

*Conclusion :* $\boxed{\ker(u) \neq \ker\left(u^2\right)}$

***d.*** Comme $\ker(u) \subset \ker(u^2) \subset \ker(u^3)$ et que les inclusions sont strictes, et que $\ker(u) \neq \{0\}$ alors

$$0 < \dim(\ker(u)) < \dim\left(\ker(u^2)\right) < \dim\left(\ker(u^3)\right) \leq 3$$

(Un sous espace de même dimension que l'espace est l'espace lui même)
les dimension étant entières, $1 \leq \dim(\ker(u))$ puis $2 \leq \dim(\ker(u)) + 1 \leq \dim\left(\ker(u^2)\right)$ et enfin $3 \leq \dim\left(\ker(u^2)\right) + 1 \leq \dim\left(\ker(u^3)\right)$

*Conclusion :* $\boxed{\dim(\ker(u)) = 1 : \dim\left(\ker(u^2)\right) = 2 \text{ et } \dim\left(\ker(u^3)\right) = 3}$

Donc $\ker(u^3) = \mathbb{R}^3$, d'où $u^3 = 0$ et $M^3 = 0$ (si, hypothèse de départ, $M^3 \neq 0$)
Donc par l'absurde, $M^3$ n'est pas non nulle,

*Conclusion :* $\boxed{M^3 = 0}$

**9.** ***a.*** $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+be & bf & ad \\ ed & ac+df & cb \\ fc & ae & eb+df \end{pmatrix}$

et $M^3 = \begin{pmatrix} ade+bcf & abe+a^2c+adf & b^2e+abc+bdf \\ ac^2+cdf+bce & ade+bcf & dac+d^2f+bde \\ be^2+def+ace & fbe+df^2+acf & ade+bcf \end{pmatrix}$

$\gamma(M)M + \delta(M)I_3 = (ac+df+be)\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} + (bcf+ade)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M^3$

***b.*** Si $\gamma(M)$ et $\delta(M)$ sont nuls, alors $M^3 = 0$ donc M est nilpotente.
Si M est nilpotente alors (2) $M^3 = 0$ donc $\gamma(M)M + \delta(M)I_3 = 0$.
On a alors

— ou bien tous ses coefficients ne sont pas nuls, alors $(M, I)$ est libre (2 matrices non proportionnelles) donc $\gamma(M) = 0$ et $\delta(M) = 0$
— ou bien tous ses coefficients sont nuls, alors $\gamma(M) = 0$ et $\delta(M) = 0$

*Conclusion :* $\boxed{\text{M est nilpotente si et seulement si } \gamma(M) \text{ et } \delta(M) \text{ sont nuls}}$

***c.*** On suppose que $a$, $b$ et $d$ sont égaux à 1.
Donc M est nilpotente si et seulement si (1) : $ac + df + be = c + f + e = 0$ et $bcf + ade = cf + e = 0$

$$\iff \begin{cases} e = -cf \\ c + f - cf = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e = -cf \\ c(1-f) = -f \end{cases} \text{ et pour } f \neq 1$$
$$\iff \begin{cases} e = f^2/(1-f) \\ c = -f/(1-f) \end{cases}$$

Donc pour chaque $f \neq 1$ il y a une solution, ce qui en fait une infinité.

*Conclusion :* $\boxed{\text{il existe une infinité de choix pour le triplet } (c,e,f) \text{ de } \mathbb{R}^3 \text{ pour lesquels la matrice M est nilpotente.}}$

***d.*** Or, pour $a$, $b$ et $d$ égaux à 1 et $f \neq 1$ et non nul (pour que la matrice M ne soit pas triangulaire) alors la matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -f/(1-f) & 0 & 1 \\ f^2/(1-f) & f & 0 \end{pmatrix}$ est non triangulaire et nilpotente.
Comme elle est nilpotente, sa seule valeur propre est 0.
Comme le seul terme sur sa diagonale est 0, on a $\mathrm{M} \in \mathcal{D}_3$

*Conclusion :* $\boxed{\mathcal{D}_3 \text{ contient une infinité de matrices nilpotentes qui ne sont pas triangulaires.}}$

***e.*** Pour avoir tous les coefficients non nuls, on recycle le partie I 2)
Avec $f = 2$ on $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_3$ donc $\mathrm{M} + \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_3$ a tous ses coefficients non nuls.