NOM :

1 ► Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\mathrm{tr}(A^tA)$ puis résoudre l'équation $\mathrm{tr}(A^tA) = 0$.

2 ► Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $\Phi_A : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, X \mapsto \mathrm{tr}(AX)$ est linéaire.

3 ► On admet que l'application $\Phi : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}\big(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}\big), \mathrm{A} \mapsto \Phi_{\mathrm{A}}$ est linéaire. Montrer que Φ est bijective.

4 ► Soit E un espace vectoriel et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que les sous-espaces $\ker(\varphi)$, $\ker(\varphi - \mathrm{id}_E)$ et $\ker(\varphi + \mathrm{id}_E)$ sont en somme directe.