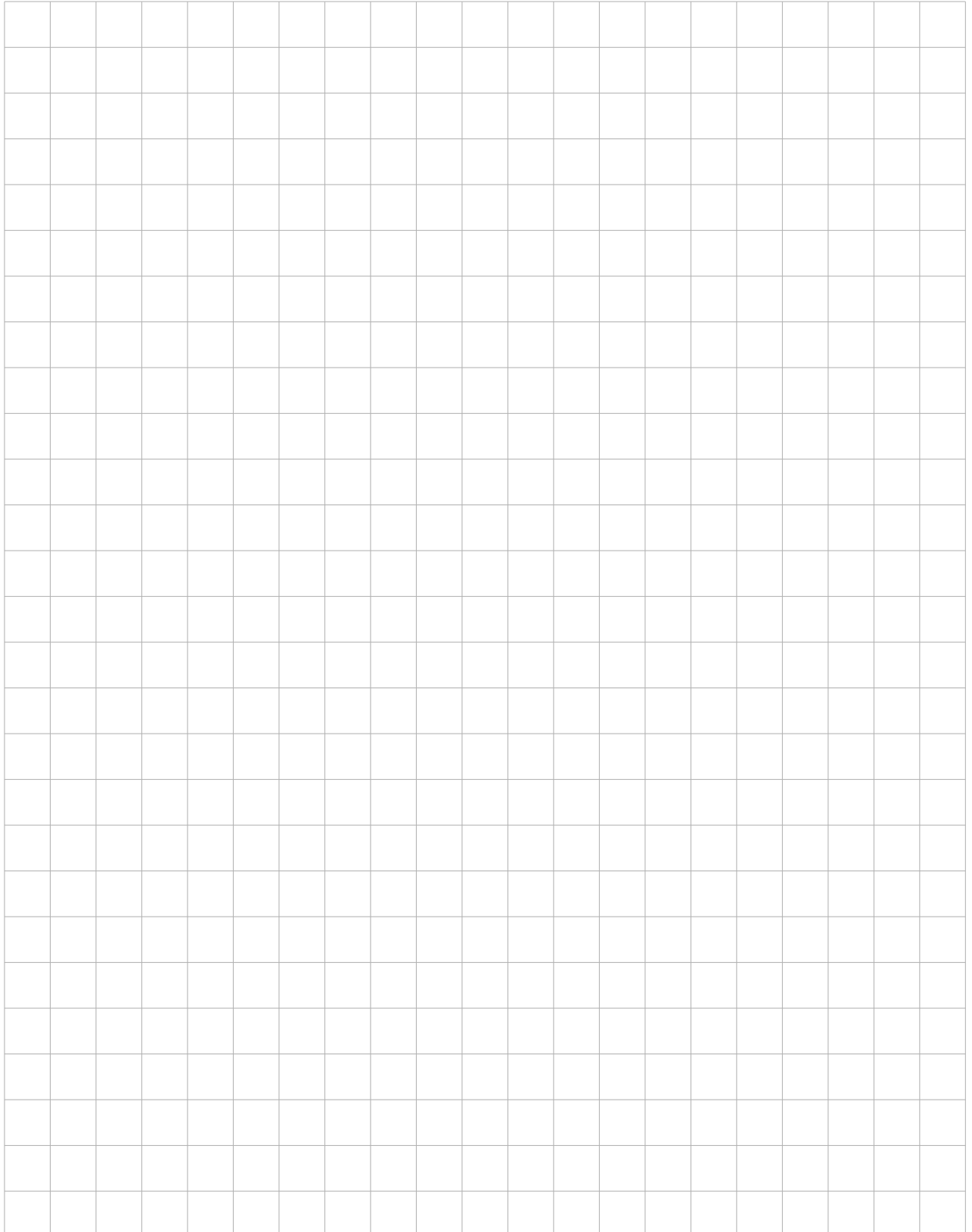


NOM :

1 ► Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\text{tr}(A^t A)$ puis résoudre l'équation $\text{tr}(A^t A) = 0$.



2 ► Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $\Phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, X \mapsto \text{tr}(AX)$ est linéaire.



3 ► On admet que l'application $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}), A \mapsto \Phi_A$ est linéaire. Montrer que Φ est bijective.



4 ► Soit E un espace vectoriel et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les sous-espaces $\ker(\varphi)$, $\ker(\varphi - \text{id}_E)$ et $\ker(\varphi + \text{id}_E)$ sont en somme directe.

