

1 ► Pour tout entier $p \geq 3$ et tout réel $x \in [0, 1]$, on pose : $f_p(x) = x^p - px + 1$.

a. Étudier les variations de f_p sur $[0, 1]$.

La fonction f_p est polynomiale donc dérivable sur $[0, 1]$ et :

$$\forall x \in [0, 1], f'_p(x) = px^{p-1} - p \leq 0.$$

De plus, f'_p ne s'annule qu'en 0.

Donc f_p est strictement décroissante sur $[0, 1]$.

x	0	1
$f'_p(x)$		—
$f_p(x)$	1	$2 - p$

b. En déduire que l'équation $f_p(x) = 0$ admet une et une seule solution dans $]0, 1[$; on note x_p cette solution.

La fonction f_p est **continue** et **strictement décroissante** sur $[0, 1]$ donc elle réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $f_p([0, 1]) = [2 - p, 1]$.

Puisque $p \geq 3$, on a $2 - p < 0$ donc $0 \in [2 - p, 1]$ donc il existe un unique $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = 0$.

De plus $f(0) > 0$ et $f(1) < 0$ donc $x \in]0, 1[$.

Autre rédaction possible -

La fonction f_p est **continue** et **strictement décroissante** sur $[0, 1]$ et l'on a :

$$f_p(0) = 1 > 0 \text{ et } f_p(1) = 2 - p < 0 \text{ (car } p \geq 3\text{)}.$$

D'après le (corollaire du) théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_p(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0, 1[$ i.e. il existe un unique $x \in]0, 1[$ tel que $f_p(x) = 0$.

c. Calculer $f_{p+1}(x_p)$ puis en déduire que $f_{p+1}(x_p) < 0$.

On a :

$$\begin{aligned} f_{p+1}(x_p) &= x_p^{p+1} - (p+1)x_p + 1 \\ &= x_p^{p+1} - (x_p^p + 1) - x_p + 1 \\ &= \underbrace{x_p^p}_{>0} \underbrace{(x_p - 1)}_{<0} - \underbrace{x_p}_{>0} \\ &< 0. \end{aligned}$$

d. Montrer que la suite (x_p) converge.

Soit $p \in \mathbb{N}$, on a $f_{p+1}(x_p) < 0$ et $f_{p+1}(x_{p+1}) = 0$ donc $f_{p+1}(x_p) < f_{p+1}(x_{p+1})$ or f_{p+1} est décroissante donc $x_p > x_{p+1}$.

Donc la suite (x_p) est **décroissante** or elle est **minorée** (par 0) donc la suite (x_p) converge.

2 ► On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 2$, $u_2 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 2, u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n \sqrt{u_n u_{n-1}}}.$$

On admet que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est bien définie et strictement positive.

a. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $u_n \neq 0$, on peut écrire :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + u_n \sqrt{u_n u_{n-1}}}$$

et la suite u étant strictement positive, on en déduit :

$$u_n \sqrt{u_n u_{n-1}} > 0 \text{ donc } \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1.$$

Puisque $u_n > 0$, cela conduit à $u_{n+1} < u_n$.

Donc la suite (u_n) est **décroissante** or elle est **minorée** (par 0) donc la suite (u_n) converge.

b. Montrer que la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est 0.

Notons ℓ la limite de la suite (u_n) , on a alors :

$$u_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell, u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell, u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

d'où, par passage à la limite dans la relation de récurrence de la suite :

$$\ell = \frac{\ell}{1 + \ell \sqrt{\ell^2}}$$

d'où (sachant que $\ell \geq 0$ puisque u est positive) :

$$\ell + \ell^3 = \ell$$

ce qui donne $\ell = 0$. Donc :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

c. On admet que : $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$.

En utilisant le lemme de Césàro, montrer que $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

Le lemme de Césàro donne :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$$

d'où par télescopage :

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_1^2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2.$$

Puisque $\frac{1}{n} \frac{1}{u_1^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on en déduit :

$$\frac{1}{n} \frac{1}{u_{n+1}^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$$

donc (en décalant l'indice) :

$$u_{n+1}^2 \sim \frac{1}{2n} \text{ i.e. } u_n^2 \sim \frac{1}{2(n-1)} \sim \frac{1}{2n}$$

donc :

$$u_n \sim \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$