On trouve $\alpha_2 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ tandis que $v_1 = 1$ et que $v_2 = \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$. Or $(1+\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2} < 6$, donc $\alpha_2 < v_2$.

$\star$ Supposons que pour un certain n supérieur ou égal à 2, on ait : $\alpha_n \leqslant v_n$.

Alors : $\alpha_{n+1} = \sqrt{\alpha_n + \dfrac{1}{2^n}} \leqslant \sqrt{v_n + \dfrac{1}{2^n}} = v_{n+1}$, et comme la suite (α_n) est décroissante on a *a fortiori* : $\alpha_{n+1} \leqslant v_{n+1}$.

On conclut par le principe de récurrence : $\forall\, n2, \alpha_n \leqslant v_n$.

d) En appliquant f_n qui, sur l'intervalle considéré, est croissante, on obtient : $0 = f_n(\alpha_n) \leqslant f_n(v_n)$.

On a donc $v_n^2 - v_n - \dfrac{1}{2^n} \geqslant 0$, *a fortiori* $v_n^2 v_{n+1}^2$. Comme tout est positif il vient $v_n v_{n+1}$â et la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

4. a) La suite est décroissante à partir du rang 2 et minorée par $\dfrac{1}{2}$ ou même par 1, elle est donc convergente de limite notée ℓ.

b) On sait que $v_{n+1} = \sqrt{v_n + \dfrac{1}{2^n}}$. En passant à la limite, on obtient $\ell = \sqrt{\ell}$, soit $\ell^2 - \ell = 0$. Cette équation possède deux solutions 0 et 1. Comme 0 est à rejeter, il reste $\ell = 1$.

Exercice 1.4.

Pour tout x et y réels strictement positifs, on pose $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$.

1. Prouver la convergence de l'intégrale définissant $B(x,y)$.

2. a) Prouver que $\forall\, x > 0, \forall\, y > 0, B(x,y) = B(y,x)$.

b) Montrer que $\forall\, x > 0, \forall\, y > 0, B(x+1,y) = \dfrac{x}{y} B(x,y+1)$.

3. Montrer que $\forall\, x > 0, \forall\, y > 0, B(x,y+1) = B(x,y) - B(x+1,y)$. En déduire que :

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\, B(x,y).$$

4. Soit n un entier naturel non nul. Soit x un réel strictement positif.

a) Étudier le signe sur $[0,1]$ de la fonction $g : t \mapsto \mathrm{e}^{-t} - 1 + t$. En déduire que pour tout $t \in [0,n]$, on a :

$$(1 - \frac{t}{n})^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

b) Montrer que pour tout $t \in [0,n]$, on a $(1 - \dfrac{t^2}{n})\,\mathrm{e}^{-t} \leqslant (1 - \dfrac{t}{n})^n$.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n\, t^{x-1}\, dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt = \Gamma(x)$

5. Montrer que :

$$\forall\, x>0, \Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Solution :

1. La fonction $f : t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue et positive sur $]0,1[$.

$$f(t) \underset{(0)}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}},\text{ avec } 1-x<1.\ f(t) \underset{(1)}{\sim} \frac{1}{(1-t)^{1-y}},\text{ avec } 1-y<1.$$

Par suite, deux applications de la règle de Riemann montrent que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ converge.

2. a) Le changement de variable $u = 1-t$ dans l'intégrale $B(x,y)$ donne immédiatement l'égalité demandée.

b) Soit $0 < a \leqslant b < 1$. On calcule $\displaystyle\int_a^b t^x(1-t)^{y-1}dt$ au moyen d'une intégration par parties en posant $u(t) = t^x$, d'où $u'(t) = xt^{x-1}$ et $v'(t) = (1-t)^{y-1}$, en prenant $v(t) = -\dfrac{1}{y}(1-t)^y$.

Comme $\lim\limits_{0}(uv) = \lim\limits_{1}(uv) = 0$, il vient alors par passage à la limite :

$$B(x+1,y) = \frac{x}{y}B(x,y+1).$$

3. On remarque que

$$B(x,y+1) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,(1-t)\,dt = B(x,y) - B(x+1,y).$$

De la question précédente, on déduit que :

$$B(x+1,y) = \frac{x}{y}B(x,y+1) = \frac{x}{y}(B(x,y) - B(x+1,y)).$$

Ainsi :

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\,B(x,y).$$

4. a) La fonction $g : t \mapsto \mathrm{e}^{-t} - 1 + t$ est croissante sur $[0,1]$ avec $g(0) = 0$. Elle est donc positive sur $[0,1]$.

D'où, pour tout $t \in [0,n]$, $\big(1-\frac{t}{n}\big) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{t}{n}}$. En élevant à la puissance n, on trouve l'inégalité demandée. On peut aussi invoquer la convexité de l'exponentielle pour prouver que $\forall\, u \in \mathbb{R},\ 1+u \leqslant \mathrm{e}^u$, relation que l'on applique à $u = -\dfrac{t}{n}$ avant d'élever à la puissance $n^{\text{ème}}$.

b) La relation à démontrer est évidente si $t \in [\sqrt{n}, n]$. Considérons à présent le cas où $t \in [0, \sqrt{n}[$.

On étudie sur $[0,\sqrt{n}[$ la fonction $f : t \mapsto n\ln\big(1-\dfrac{t}{n}\big)+t-\ln\big(1-\dfrac{t^2}{n}\big)$.
La fonction f est dérivable sur $[0,\sqrt{n}[$ et on vérifie que $f'(t)=\dfrac{t((t-1)^2+(n-1))}{(n-t)(n-t^2)}$,
quantité positive pour tout $t\in[0,\sqrt{n}[$.
Par suite, pour tout $t\in[0,\sqrt{n}[$, $f(t)\leqslant f(0)=0$.
On en déduit que $n\ln\big(1-\dfrac{t}{n}\big)\leqslant \ln\big(1-\dfrac{t^2}{n}\big)-t$. L'inégalité demandée s'en déduit par croissance de la fonction exponentielle.

c) On déduit de a) et b) que :

$$\int_0^n (1-\frac{t^2}{n})\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}dt \leqslant \int_0^n \big(1-\frac{t}{n}\big)^n t^{x-1}dt \leqslant \int_0^n \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}dt.$$

Or, par définition, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}dt=\Gamma(x)$.
D'autre part,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \big(1-\frac{t^2}{n}\big)\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}dt - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n \mathrm{e}^{-t}t^{x+1}dt$$

$$= \Gamma(x) - 0.\Gamma(x+2) = \Gamma(x)$$

Le théorème d'encadrement permet alors de conclure à l'égalité souhaitée.

5. Le changement de variable $u=\dfrac{t}{n}$ donne $\displaystyle\int_0^n \big(1-\frac{t}{n}\big)^n t^{x-1}\,dt = n^x B(n+1,x)$.
On applique alors la formule établie à la question 3. lorsque $x=n$ (entier naturel). En réitérant la relation, on obtient :

$$B(n+1,y)=\frac{n}{n+y}B(n,y)=\big(\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+y}\big)B(1,y)$$

Comme $B(1,y)=\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{y-1}dt=\frac{1}{y}$, on en déduit que pour tout entier naturel n et tout réel $y>0$, on a : $B(n+1,y)=\dfrac{n!}{y(y+1)\dots(y+n)}$.
Ainsi, $\displaystyle\int_0^n \big(1-\frac{t}{n}\big)^n t^{x-1}\,dt = n^x B(n+1,x) = n^x\,\frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.
Il suffit alors de passer à la limite lorsque n tend vers l'infini et de reconnaître $\Gamma(x)$ dans le membre de gauche grâce à la question 4. c)

Exercice 1.5.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur l'intervalle $[0,1]$ et soit F le sous-ensemble de E constitué par les fonctions h de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ qui vérifient les deux relations :