CHAPITRE IV

RÉVISIONS SUR LES SÉRIES ET LES INTÉGRALES

Exercice C-61

Calculer la limite de la suite u donnée pour tout $n \geqslant 1$ par : $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(n-k)}$.

Indication : le calcul pourra nécessiter un changement de variable dans une intégrale à l'aide de l'application $t \mapsto \frac{1+\sin(t)}{2}$.

Tout d'abord, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on écrit :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k(n-k)}{n^2}},$$

c'est-à-dire :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}.$$

On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x) = \sqrt{x(1-x)}.$$

Cette fonction est continue sur $[0,1]$ donc il résulte du théorème sur les sommes de Riemann que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \sqrt{x-x^2}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-(2x-1)^2}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'application : $\varphi : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [0,1], t \mapsto \frac{1+\sin(t)}{2}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante donc on peut poser :

$$x = \frac{1+\sin(t)}{2} \text{ donc } 2x-1 = \sin(t) \text{ et } 2\mathrm{d}x = \cos(t)\mathrm{d}t.$$

Le théorème de changement de variable donne donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\frac{1}{2}\cos(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t)+1}{2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\sin(2t)+\frac{1}{2}t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(n-k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{8}.$$

Exercice C-62

Calculer le développement limité à l'ordre 10 en 0 de : $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$.

Tout d'abord, notons que la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc l'expression de $f(x)$ est bien définie.
Notons G une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction intégrée de sorte que :

$$f(x) = \mathrm{G}(x^2) - \mathrm{G}(x).$$

Par sa définition, G est une primitive d'une fonction continue donc est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ sont également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, f est classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est donnée pour tout réel x par :

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+(x^2)^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^4}},$$

soit :

$$f'(x) = 2x(1+x^8)^{-\frac{1}{2}} - (1+x^4)^{-\frac{1}{2}}.$$

Cherchons un $\mathrm{DL}_9(0)$ de $f'(x)$:

$$(1+u)^{-\frac{1}{2}} \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + o(u^2)$$

d'où (puisque $x^8 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $x^4 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$) :

$$(1+x^8)^{-\frac{1}{2}} \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^8 + o(x^9)$$

et :

$$(1+x^4)^{-\frac{1}{2}} \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{8}x^8 + o(x^8).$$

Ce dernier développement limité peut être écrit avec un $o(x^9)$ puisque la fonction $x \mapsto (1+x^4)^{-\frac{1}{2}}$ est paire (donc il n'y a que des puissances paires dans son développement limité), d'où :

$$\begin{aligned} f'(x) &\underset{0}{=} 2x\Big(1-\frac{1}{2}x^8\Big)-\Big(1-\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{8}x^8\Big)+o(x^9) \\ &\underset{0}{=} -1+2x+\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{8}x^8-x^9+o(x^9). \end{aligned}$$

L'expression de $f(x)$ assure que $f(0)=0$, on obtient donc en intégrant :

$$f(x) \underset{0}{=} -x+x^2+\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{24}x^9-\frac{1}{10}x^{10}+o(x^{10}).$$

En fait, l'intégration d'un DL est hors programme... je n'aurais pas du donner cet exercice. L'élément subtil est lié au fait qu'en intégrant un $o(x^9)$ on obtienne un $o(x^{10})$.

Exercice C-63

Dans chacun des cas suivants, étudier la convergence de la série de terme général u_n :

1. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;
2. $u_n = \dfrac{1}{n^2\sqrt{n+1}}$;
3. $u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$;
4. $u_n = \dfrac{\big(\ln(n)\big)^2}{n^4}$;
5. $u_n = \sin\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$;
6. $u_n = \dfrac{\cos(n)-\sin(n)}{n^2}$.

1. L'inégalité $n(n+1) \leqslant (n+1)^2$ permet d'écrire pour tout $n \geqslant 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geqslant \frac{1}{n+1} \geqslant 0,$$

or la série de terme général $\frac{1}{n}$ est divergente, donc celle de terme général $\frac{1}{n+1}$ également. D'après le critère de comparaison pour les séries à termes positifs, il s'ensuit que la série de terme général u_n diverge.

2. Il s'agit d'une suite positive et l'on a pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2},$$

or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente donc, d'après le critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série de terme général u_n converge.

3. Il s'agit d'un suite positive et l'on a :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

or la série de terme général $\frac{1}{n}$ est divergente donc, d'après le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série de terme général u_n diverge.

4. L'inégalité $\ln(n) \leqslant n$ permet d'écrire pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant \frac{\big(\ln(n)\big)^2}{n^4} \leqslant \frac{1}{n^2},$$

or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente donc, d'après le critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série de terme général u_n converge.

5. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $0 \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant 1$ donc la suite est positive et l'on a :

$$\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2},$$

or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente donc, d'après le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série de terme général u_n converge.

6. Pour tout $n \geqslant 4$, on a :

$$0 \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{\pi}{2},$$

donc la suite est positive. De plus, on a :

$$u_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\pi}{\sqrt{n}},$$

or la série de terme général $\frac{\pi}{n}$ est divergente donc, d'après le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série de terme général u_n diverge.

7. Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\left|\frac{\cos(n)-\sin(n)}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2},$$

or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente donc, d'après le critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série de terme général u_n est absolument convergente et, *a fortiori*, converge.

Exercice C-64

Dans chacun des cas suivants, étudier la convergence de la série de terme général u_n et calculer la somme en cas de convergence :

1. $u_n = (n+1)e^{-n}$;
2. $u_n = \dfrac{n(n+1)}{3^n}$;
3. $u_n = \dfrac{2^n}{(n+1)!}$;
4. $u_n = \dfrac{n^2+n+1}{2^n}$;
5. $u_n = \dfrac{n\,2^n}{(n+1)!}$.

1. Puisque $0 < e^{-1} < 1$, la série géométrique dérivée $\sum ne^{-(n-1)}$ converge et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-(n-1)} = \frac{1}{(1-e^{-1})^2},$$

d'où :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)e^{-n} = \frac{1}{(1-e^{-1})^2}.$$

2. On a pour $n \geqslant 1$:

$$\frac{n(n+1)}{3^n} = \frac{1}{3}(n+1)n\frac{1}{3^{n-1}},$$

or $0 < \frac{1}{3} < 1$ donc la série géométrique dérivée $\sum n(n-1)\frac{1}{3^{n-2}}$ converge et :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{3^n} &= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{3^{n-1}} \\ &= \frac{1}{3}\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{(m-1)m}{3^{m-2}} \\ &= \frac{1}{3}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} \\ &= \frac{9}{4}.\end{aligned}$$

3. On a pour tout n :

$$\frac{1}{2}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!},$$

et la convergence de la série exponentielle assure la convergence de la série de terme général u_n. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(n+1)!} &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} - 1\right) \\ &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^2 - 1).\end{aligned}$$

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on écrit :

$$\frac{n^2+n+1}{2^n} = \frac{n(n-1)+2n+1}{2^n} = \frac{1}{2^2}\frac{n(n-1)}{2^{n-2}} + \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}.$$

La série considérée est donc une combinaison linéaires de séries géométrique et géométriques dérivées de raison $\frac{1}{2}$. On en déduit la convergence de la série et on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{2^n} &= \frac{1}{2^2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} - 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} - 1 - \frac{1}{2},\end{aligned}$$

donc :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{2^n} = \frac{1}{2^2}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{5}{2},$$

soit :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{2^n} = \frac{15}{2}.$$

Finalement, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{2^n} = 1 + \frac{3}{2} + \frac{15}{2} = 10.$$

5. Pour tout entier n, on écrit :

$$\frac{n\,2^n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)\,2^n}{(n+1)!} - \frac{2^n}{(n+1)!} = \frac{2^n}{n!} - \frac{1}{2}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

et la convergence de la série exponentielle assure celle de la série de terme général u_n. De plus, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n\,2^n}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!},$$

puis :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n\,2^n}{(n+1)!} = \mathrm{e}^2 - \frac{1}{2}(\mathrm{e}^2 - 1) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{2}.$$

Exercice C-65

Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série de terme général : $u_n = (-1)^n n^a\left(\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

On écrit :

$$\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{120n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)\right) = \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{120n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)$$

d'où :

$$u_n = (-1)^n n^\alpha\left(\frac{1}{6n^3} - \frac{1}{120n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{6n^{3-\alpha}} + v_n \quad \text{où} \quad v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{120n^{5-\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{5-\alpha}}\right).$$

► Si $\alpha \geqslant 3$ alors $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{6n^{3-\alpha}}$ ne tend pas vers 0 donc la série de terme général u_n diverge.

► Si $\alpha < 3$ alors :

- la série de terme général $\frac{(-1)^n}{6n^{3-\alpha}}$ converge par le critère spécial des séries alternées ;
- on a $5 - \alpha > 2 > 1$ et $|v_n| \sim \frac{1}{120n^{5-\alpha}}$ donc, d'après le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série de terme général v_n converge (absolument).

Finalement, si $\alpha < 3$ alors la série de terme général u_n converge.

Exercice C-68

Dans chacun des cas suivants, montrer la convergence de l'intégrale et calculer sa valeur :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-5t}\,\mathrm{d}t$;

2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$;

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+3)^2}\,\mathrm{d}t$;

4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\ln\big(\tan(t)\big)\,\mathrm{d}t$.

1. La fonction $t \mapsto e^{-5t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc il suffit d'étudier la convergence en $+\infty$. Soit $X > 0$, on a :
$$\int_0^X e^{-5t} dt = \Big[-\frac{1}{5}e^{-5t}\Big]_0^X = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{-5X},$$
et en faisant tendre X vers $+\infty$, on obtient la convergence de l'intégrale et sa valeur $\frac{1}{5}$.
2. La fonction $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$ et impaire donc il suffit de prouver la convergence sur l'intervalle $[0,1]$. Soit $X \in]0,1[$:
$$\int_0^X \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \Big[-\sqrt{1-t^2}\Big]_0^X = 1 - \sqrt{1-X}$$
et la limite de cette expression en 1 est égale à 1. On en déduit que l'intégrale converge sur $[0,1]$ puis, par imparité de la fonction intégrée, sur $[-1,0]$. Le fait que la fonction soit impaire donne en outre :
$$\int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = 0.$$
3. La fonction $t \mapsto \frac{t}{(t^2+3)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc il suffit d'étudier la convergence en $+\infty$. Soit $X > 0$, on a :
$$\int_0^X \tfrac{t}{(t^2+3)^2} dt = \Big[-\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{t^2+3}\Big]_0^X = -\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{X^2+3} + \tfrac{1}{6}.$$
et en faisant tendre X vers $+\infty$, on obtient la convergence de l'intégrale et sa valeur $\frac{1}{6}$.

Exercice C-71

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, on note :
$$I = \int_a^b f(t) dt.$$
et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:
$$R_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big).$$

1. On suppose que f est une fonction lipschitzienne sur $[a,b]$, de rapport λ, c'est-à-dire vérifiant :
$$\forall (x,y) \in [a,b]^2,\ \big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \lambda\, \big|x - y\big|.$$
Montrer que l'on a : Montrer que si f est lipschitzienne sur $[a,b]$, de rapport λ, alors :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |R_n - I| \leqslant \frac{\lambda(b-a)^2}{2n}.$$
2. Que peut-on dire dans le cas d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$?
3. Proposer un script en Python permettant d'obtenir une valeur approchée à 10^{-5} près de :
$$I = \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on adopte la notation suivante pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$a_k = a + k\frac{b-a}{n},$$

ce qui donne en particulier pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n}$$

et :

$$\frac{b-a}{n} f(a_k) = \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k)\,\mathrm{d}t.$$

Tout d'abord, on a :

$$\mathrm{I} - \mathrm{R}_n = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k),$$

donc :

$$\mathrm{I} - \mathrm{R}_n = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k)\,\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire :

$$\mathrm{I} - \mathrm{R}_n = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} \big(f(t) - f(a_k)\big)\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit par inégalité triangulaire sur $[a_k, a_{k+1}]$:

$$|\mathrm{I} - \mathrm{R}_n| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} \big(f(t) - f(a_k)\big)\,\mathrm{d}t\right|,$$

puis :

$$|\mathrm{I} - \mathrm{R}_n| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(t) - f(a_k)|\,\mathrm{d}t.$$

Puisque f est supposée lipschitzienne de rapport λ, on a :

$$|\mathrm{I} - \mathrm{R}_n| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} \lambda|t - a_k|\,\mathrm{d}t.$$

Lorsque $t \in [a_k, a_{k+1}]$, on a $t - a_k \geqslant 0$ d'où :

$$|\mathrm{I} - \mathrm{R}_n| \leqslant \lambda\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} (t - a_k)\,\mathrm{d}t,$$

or :

$$\begin{aligned}\int_{a_k}^{a_{k+1}} (t - a_k)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{2}(t-a_k)^2\right]_{a_k}^{a_{k+1}}\\ &= \frac{1}{2}(a_{k+1} - a_k)^2\\ &= \frac{1}{2}\frac{(b-a)^2}{n^2}.\end{aligned}$$

On obtient donc finalement :

$$|\mathrm{I} - \mathrm{R}_n| \leqslant \lambda\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\frac{(b-a)^2}{n^2},$$

d'où :

$$|\mathrm{I} - \mathrm{R}_n| \leqslant \frac{\lambda(b-a)^2}{2n},$$

2. Lorsque f est de classe C^1 sur $[a,b]$, la fonction f' est continue sur le segment $[a,b]$ donc la fonction $|f'|$ est continue sur le segment $[a,b]$ donc $|f'|$ est y est bornée et atteint ses bornes. On peut donc poser :
$$\lambda = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \left|f'(x)\right|.$$
L'inégalité des accroissements finis assure alors que f est lipschitzienne de rapport λ et on se retrouve dans un cas d'application de la question précédente.
3. On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par :
$$f(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}.$$
Cette fonction est infiniment dérivable et on a notamment pour tout $x \in [0,1]$:
$$f'(t) = -t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \quad \text{et} \quad f''(t) = (1-t^2)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}.$$
On a $f''(t)$ négative sur $[0,1]$ donc f' décroît sur $[0,1]$. De plus, on a $f'(0) = 0$ et $f'(1) = -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$. On en déduit :
$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \left|f'(t)\right| = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.$$
Les deux questions précédentes permettent d'écrire (en adaptant les notations aux cas de cette fonction f) :
$$|\mathrm{I} - \mathrm{R}_n| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}\,n}.$$
Finalement, il suffit que n soit tel que $\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}\,n} \leqslant 10^{-5}$ pour que R_n fournisse une valeur approchée de I à 10^{-5} près.
Le script suivant permet d'obtenir cette valeur approchée.
```python
from math import exp
def S(n):
    somme=0
    for k in range(n):
        somme+=exp(-k**2/(2*n**2))
    return(somme/n)
n=1
while 1/(2*exp(1/2)*n)>1E-5:
    n+=1
print('Valeur approchée: ',S(n))
```

Exercice C-72

1. Soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ sur un intervalle I et $(\alpha,\beta) \in \mathrm{I}^2$.
En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 3 pour φ entre $\frac{\alpha+\beta}{2}$ et α, puis entre $\frac{\alpha+\beta}{2}$ et β, montrer que :
$$\varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = (\beta-\alpha)\varphi'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} (\beta-t)^2\varphi'''(t)\,\mathrm{d}t - \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\alpha} (\alpha-t)^2\varphi'''(t)\,\mathrm{d}t\right).$$
2. On considère une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et on subdivise l'intervalle $[a,b]$ de façon régulière en $n+1$ points par : $\forall k \in [\![0,n]\!],\ a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.
On pose également $\mathrm{M}_2 = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \left|f''(t)\right|$.
On souhaite montrer que $\mathrm{I} = \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est la limite de : $\mathrm{S}_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right)$.

a. Interpréter géométriquement la somme S_n.

b. En utilisant la question **1.**, montrer que :

$$\forall n \geqslant 1,\ |I - S_n| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{24n^2}.$$

c. À l'aide de Python, comparer numériquement l'efficacité de cette méthode à celle de l'exercice précédent.

Pour la dernière question, on peut par exemple programmer la fonction ainsi :

```python
def milieu(f, a, b, n):
    S = 0
    for k in range(n):
        S = S + f( ((a + k*(b-a)/n) + (a + (k+1)*(b-a)/n)) / 2)
    return (b-a)/n * S
```

Exercice C-73

Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, puisque la fonction ln est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1,2]$, la formule de Taylor avec reste intégral donne cet intervalle :

$$\ln(2) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2-1)^k}{k!} \ln^{(k)}(1) + \int_1^2 \frac{(2-t)^n}{n!} \ln^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

Par ailleurs, à l'aide d'une récurrence facile, on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0,\ \ln^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{x^k}.$$

On a donc (sachant que $\ln(1) = 0$) :

$$\ln(2) = 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{1^k} + \int_1^2 \frac{(2-t)^n}{n!} \frac{(-1)^{n+2} n!}{t^{n+1}} \mathrm{d}t,$$

soit :

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + (-1)^n \int_1^2 \frac{(2-t)^n}{t^{n+1}} \mathrm{d}t.$$

Pout tout $t \in [1,2]$, on a :

$$0 \leqslant \frac{(2-t)^n}{t^{n+1}} \leqslant (2-t)^n$$

d'où en utilisant la croissance de l'intégrale sur $[1,2]$:

$$0 \leqslant \int_1^2 \frac{(2-t)^n}{t^{n+1}} \mathrm{d}t \leqslant \int_1^2 (2-t)^n \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{n+1}(2-t)^{n+1} \right]_1^2 = \frac{1}{n+1}$$

donc par théorème d'encadrement :

$$\int_1^2 \frac{(2-t)^n}{t^{n+1}} \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et par conséquent :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2) \quad \text{donc} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2).$$