CHAPITRE V

V.A. DISCRÈTES ET ESPÉRANCE

Exercice C-75

On considère une suite infinie de lancers indépendants d'une pièce truquée donnant *pile* avec une probabilité $p \in]0,1[$.

1. Soit $n \geqslant 2$. Quelle est la probabilité que la séquence *pile-face* apparaisse pour la première fois aux lancers $n-1$ et n ?
2. Quelle est la probabilité que la séquence *pile-face* apparaisse au moins une fois ?
3. Quelle est la probabilité que la séquence *pile-pile* apparaisse sans qu'il n'y ait jamais eu de séquence *pile-face* auparavant ?

On note en abrégé P et F pour *pile* et *face* respectivement.

1. Pour tout $n \geqslant 2$, notons E_n l'événement : « la séquence PF se produit pour la première fois aux lancers $n-1$ et n » et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, F_k l'événement : « le k-ième tirage donne F ».

   Avec cette notation, une succession de tirages réalisant l'événement E_n est du type (avec $0 \leqslant k \leqslant n-2$) :
$$F_1 \cap \cdots \cap F_k \cap \overline{F_{k+1}} \cap \cdots \cap \overline{F_{n-2}} \cap \overline{F_{n-1}} \cap F_n.$$
   Compte tenu de l'indépendance des différents tirages, la probabilité de cette succession de tirages est (en notant $q = 1-p$) :
$$q^k p^{n-2-k} pq = q^{k+1} p^{n-1-k}.$$
   Ainsi, E_n s'écrivant comme l'union disjointe de ces différents événements, on a
$$\mathbb{P}(E_n) = \sum_{k=0}^{n-2} q^{k+1} p^{n-1-k} = qp^{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} q^k p^{-k}.$$
   Si $q \neq p$ alors on peut écrire :
$$\mathbb{P}(E_n) = qp^{n-1} \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}}{1-\frac{q}{p}} = qp \frac{p^{n-1}-q^{n-1}}{p-q}.$$
   Si $q = p = \frac{1}{2}$ alors :
$$\mathbb{P}(E_n) = p^n \sum_{k=0}^{n-2} 1 = \frac{n-1}{2^n}.$$

2. Notons E l'événement : « la séquence PF apparaît au moins une fois », alors :

$$\mathrm{E} = \biguplus_{n=2}^{+\infty} \mathrm{E}_n,$$

d'où :

$$\mathbb{P}(\mathrm{E}) = \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{E}_n).$$

Si $p \neq q$ alors :

$$\mathbb{P}(\mathrm{E}) = \sum_{n=2}^{+\infty} pq \frac{p^{n-1} - q^{n-1}}{p-q},$$

ce que l'on peut scinder en deux séries convergentes :

$$\mathbb{P}(\mathrm{E}) = \frac{pq}{p-q}\left(\sum_{n=2}^{+\infty} p^{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} q^{n-1}\right),$$

puis :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathrm{E}) &= \frac{pq}{p-q}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} p^{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n}\right) \\
&= \frac{pq}{p-q}\left(p\frac{1}{1-p} - q\frac{1}{1-q}\right) \\
&= \frac{pq}{p-q}\left(p\frac{1}{q} - q\frac{1}{p}\right) \\
&= \frac{pq}{p-q}\frac{p^2-q^2}{pq} = p+q = 1.
\end{aligned}$$

Dans le cas où $p = q = \frac{1}{2}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathrm{E}) &= \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)\frac{1}{2^n} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{1}{2^n} \\
&= \frac{1}{2^2}\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{1}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Il s'agit d'une série « géométrique dérivée » donc :

$$\mathbb{P}(\mathrm{E}) = \frac{1}{2^2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$

3. Pour tout $n \geqslant 2$, notons E'_n l'événement : « la séquence PP se produit pour la première fois aux lancers $n-1$ et n et il n'y a pas eu de séquence PF auparavant ». La seule succession de tirages réalisant cet événement est :

$$\mathrm{F}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{F}_{n-2} \cap \mathrm{P}_{n-1} \cap \mathrm{P}_n,$$

donc, comme plus haut :

$$\mathbb{P}(E'_n) = q^{n-2}p^2.$$

Notons alors E′ l'événement « la séquence PP apparaisse sans qu'il n'y ait eu de séquence PF auparavant », on a :

$$E' = \biguplus_{n=2}^{+\infty} E'_n,$$

d'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E') &= \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n) = \sum_{n=2}^{+\infty} q^{n-2}p^2 \\ &= p^2 \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{p^2}{1-q} = p.\end{aligned}$$

Exercice C-78

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge, indiscernables au toucher. Un joueur tire une boule au hasard :

- si la boule est blanche, alors le joueur gagne ;
- sinon, il remet la boule rouge dans l'urne et rajoute une boule rouge ; puis répète le même processus.

Ainsi, au fur et à mesure des tirages, la probabilité de gagner devient de plus en plus faible.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité que le joueur gagne avant le n-ième tirage ?

2. Quelle est la probabilité que le joueur ne gagne jamais ?

3. On recommence le même protocole, mais cette fois-ci, au lieu de rajouter une boule rouge, on double le nombre de boules rouges supplémentaires. Reprendre les questions précédentes et à l'aide d'une fonction Python, estimer la probabilité que le joueur ne gagne jamais.

3. Avec le même raisonnement, on trouve :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G_n) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{k-1} 2^j + 1} \prod_{\ell=0}^{k-2} \frac{\sum\limits_{j=0}^{\ell} 2^j}{\sum\limits_{j=0}^{\ell} 2^j + 1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2^k} \prod_{\ell=0}^{k-2} \frac{2^{\ell+1}}{2^{\ell+1}+1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2^k} \prod_{\ell=1}^{k-1} \frac{2^{\ell}}{2^{\ell}+1} \right).\end{aligned}$$

On utilise alors Python pour estimer la limite de cette probabilité :

```
def PG(n):
    s = 0
    for k in range(1, n+1):
        p = 1/(2**(k))
        for l in range(1, k):
            p = p * 2**l / (2**l + 1)
        s = s + p
    return s
```

On a :

```
>>> PG(100)
0.790288779102446
>>> PG(1000)
0.790288779102446
```

Exercice C-79

Une puce évolue sur trois cases A, B et C.
À l'instant $t = 0$, la puce se trouve sur la case A, puis elle se déplace de façon aléatoire sur ces cases selon la règle suivante :

- si la puce se trouve en A ou B à l'instant $t = n$, alors elle ira sur l'une des deux autres cases avec équiprobabilité à l'instant $t = n + 1$;
- si la puce se trouve en C à l'instant $t = n$, alors elle y restera à l'instant $t = n + 1$.

On suppose que cette situation est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On note A_n (resp. B_n, C_n) l'événement : « ;la puce se trouve en A (resp. B, C) à l'instant $t = n$ » et on note a_n, b_n et c_n les probabilités correspondantes.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_{n+1} = \frac{1}{2} b_n$.
2. Donner (sans démonstration) les relations de récurrence analogues entre b_{n+1} puis c_{n+1} et a_n, b_n et c_n.
3. Montrer que la suite $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
4. En déduire la valeur de c_n en fonction de n.
5. Déterminer les expressions de a_n et b_n en fonction de n.
6. Montrer que la puce atteint la case C presque sûrement.
7. Sachant que la puce est en C à l'instant $t = n + 1$, calculer la probabilité qu'elle y ait été pour la première fois à l'instant $t = n$.

1. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements de probabilités non nulles (A_n, B_n, C_n) :

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n)\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1})$$

d'où $\boxed{a_{n+1} = \dfrac{1}{2} b_n.}$

2. On a de même $\boxed{b_{n+1} = \frac{1}{2} a_n}$ et $\boxed{c_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n.}$
   On remarque également, que comme la puce est à l'instant 0 en A : $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = 0$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

donc $\boxed{\text{la suite } (a_n + b_n) \text{ est géométrique}}$ de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $a_0 + b_0 = 1 + 0 = 1$.

4. On déduit de la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n + b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

or (A_n, B_n, C_n) forme un s.c.e. donc :

$$c_n = 1 - a_n - b_n \ \text{ donc } \ \boxed{c_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.}$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n - \frac{1}{2}a_n = -\frac{1}{2}(a_n - b_n)$$

donc la suite $(a_n - b_n)$ est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n - b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

puis :

$$a_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) + \frac{1}{2}(a_n - b_n)$$

et

$$b_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) - \frac{1}{2}(a_n - b_n)$$

On a donc :

$$\boxed{a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} \text{ et } \boxed{b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}.}$$

On peut aussi écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n$$

donc la suite (a_n) est récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est $x^2 = \frac{1}{4}$ dont les racines sont $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$. Donc il existe un unique couple (λ, μ) de réels tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \lambda\left(\frac{1}{2}\right)^n + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Il reste alors à résoudre le système correspondant, avec $a_0 = 1$ et $a_1 = \frac{1}{2}b_0 = 0$. On trouve $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$.
De même pour b avec la même relation mais avec $b_0 = 0$ et $b_1 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2}$.

6. Notons E l'événement « la puce atteint la case C », alors :

$$\mathrm{E} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathrm{C}_n.$$

De plus, si la puce est en C à l'instant n, elle y sera encore à l'instant $n+1$ d'où $\mathrm{C}_n \subset \mathrm{C}_{n+1}$. Cela signifie que la suite (C_n) est croissante. D'après le théorème de limite monotone, on a donc :

$$\mathbb{P}(\mathrm{E}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathrm{C}_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{C}_n).$$

Puisque $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, on déduit de l'expression de $\mathbb{P}(\mathrm{C}_n)$ obtenue à la question **4.** :

$$\mathbb{P}(\mathrm{E}) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{C}_n) = 1$$

donc $\boxed{\text{l'événement « la puce atteint la case C » est presque sûr.}}$

7. Soit D_n l'événement « la puce est en C pour la première fois à l'instant n » alors :

$$\mathbb{P}_{\mathrm{C}_{n+1}}(\mathrm{D}_n) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{C}_{n+1} \cap \mathrm{D}_n)}{\mathbb{P}(\mathrm{C}_{n+1})} = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{D}_n)}{\mathbb{P}(\mathrm{C}_{n+1})}$$

puisque $\mathrm{D}_n \subset \mathrm{C}_{n+1}$.
Il reste à calculer $\mathbb{P}(\mathrm{D}_n)$. On a :

$$\mathrm{D}_n = \overline{\mathrm{C}_{n-1}} \cap \mathrm{C}_n = (\mathrm{A}_{n-1} \uplus \mathrm{B}_{n-1}) \cap \mathrm{C}_n = (\mathrm{A}_{n-1} \cap \mathrm{C}_n) \uplus (\mathrm{B}_{n-1} \cap \mathrm{C}_n)$$

donc :

$$\mathbb{P}(\mathrm{D}_n) = \mathbb{P}(\mathrm{A}_{n-1})\mathbb{P}_{\mathrm{A}_{n-1}}(\mathrm{C}_n) + \mathbb{P}(\mathrm{B}_{n-1})\mathbb{P}_{\mathrm{B}_{n-1}}(\mathrm{C}_n) = a_{n-1} \times \frac{1}{2} + b_{n-1} \times \frac{1}{2}$$

puis avec le résultat de la question **2.** :

$$\mathbb{P}(\mathrm{D}_n) = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}) = (\frac{1}{2})^n.$$

La probabilité cherchée est donc :

$$\boxed{\frac{(\frac{1}{2})^n}{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}.}$$

Pour le calcul de $\mathbb{P}(\mathrm{D}_n)$ on pourrait aussi écrire :

$$\mathrm{D}_{2k} = \mathrm{A}_0 \cap \mathrm{B}_1 \cap \mathrm{A}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{A}_{2k-2} \cap \mathrm{B}_{2k-1} \cap \mathrm{C}_{2k}$$

et

$$\mathrm{D}_{2k+1} = \mathrm{A}_0 \cap \mathrm{B}_1 \cap \mathrm{A}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{A}_{2k-2} \cap \mathrm{B}_{2k-1} \cap \mathrm{A}_{2k} \cap \mathrm{C}_{2k+1}$$

puis appliquer la formule des probabilités composées.