

Exercice 1 (d'après oral ESCP)

1. On considère un réel $a > 0$ et la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie en posant $u_0 = a$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{n}{u_n}.$$

- Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est à valeurs strictement positives et est croissante.
- Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ diverge vers $+\infty$.
- Écrire en python une fonction `seuil(a, s)` de paramètres a et s qui considère la suite dans le cas où le premier terme vaut a et qui renvoie la plus petite valeur de n telle que $u_n > s$. Par exemple :

```
>>> seuil(2, 10)
10
```

Cet exemple signifie que pour $a = 2$, on a $u_9 \leq 10$ et $u_{10} > 10$.

- Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$u_{n+1}^2 = a^2 + \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{u_k^2} + n(n+1).$$

- En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
2. On considère une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ de réels strictement positifs et l'on définit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ en posant $u_0 = a_0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}.$$

- Montrer que si la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge alors la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0.
- Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$u_n^2 = a_0^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k^2}{u_k^2} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_k.$$

- En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge.

- On s'intéresse au cas où $a_n = r^n$ avec $r \in]0, 1[$.

Justifier la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ vers une limite que l'on notera ℓ .
Donner un équivalent de $\ell^2 - u_n^2$ lorsque n tend vers $+\infty$.

CORRECTION –

- Montrons par récurrence sur l'entier n , la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : \langle 0 < u_n \leq u_{n+1} \rangle.$$

- Tout d'abord, on a $u_0 = a > 0$. De plus :

$$u_1 = u_0 + \frac{0}{u_0} \text{ donc } u_0 \leq u_1$$

donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie.

Par $\mathcal{P}(n)$, on a $u_n > 0$ donc : $u_{n+1} \geq u_n > 0$.

De plus :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{n+1}{u_{n+1}} \geq u_{n+1}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Par récurrence, on en déduit que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est à valeurs strictement positives et est croissante.

- Supposons que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ soit convergente de limite ℓ alors :

$$n = u_n(u_{n+1} - u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \times (\ell - \ell) = 0$$

ce qui est absurde.

La suite est donc croissante et non convergente donc $(u_n)_{n \geq 0}$ diverge vers $+\infty$.

c.

```
def seuil(a, s):
    n = 0
    u = a
    while u <= s:
        u = u + n/u
        n = n + 1
    return n
```

d. Soit $n \in \mathbb{N}$. En élevant au carré la relation de récurrence vérifiée par la suite, on a :

$$u_{n+1}^2 = u_n^2 + 2n + \frac{n^2}{u_n^2}$$

d'où :

$$\sum_{k=0}^n (u_{k+1}^2 - u_k^2) = \sum_{k=0}^n \left(2k + \frac{k^2}{u_k^2} \right)$$

puis par télescopage :

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 - u_0^2 &= 2 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{u_k^2} \\ &= 2 \frac{n(n+1)}{2} + 0 + \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{u_k^2} \end{aligned}$$

or $u_0 = a$ donc :

$$u_{n+1}^2 = a^2 + \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{u_k^2} + n(n+1).$$

e. Tout d'abord, la relation précédente donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1}^2 \geq k(k+1) \text{ i.e. } \forall k \in \mathbb{N}^*, u_k^2 \geq (k-1)k$$

donc :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{u_k^2} \leq \frac{1}{u_1^2} + \sum_{k=2}^n \frac{k^2}{(k-1)k} = \frac{1}{u_1^2} + \sum_{k=1}^n \frac{k}{k-1}$$

or $\frac{k}{k-1} \leq 2$ donc :

$$u_{n+1}^2 \leq a^2 + \frac{1}{u_1^2} + \sum_{k=2}^n 2 + n(n+1) = a^2 + \frac{1}{u_1^2} + 2(n-1) + n(n+1).$$

D'autre part, la relation de la question précédente donne :

$$u_{n+1}^2 \geq n(n+1),$$

d'où :

$$n(n+1) \leq u_{n+1}^2 \leq a^2 + \frac{1}{u_1^2} + \sum_{k=2}^n 2 + n(n+1) = a^2 + \frac{1}{u_1^2} + 2(n-1) + n(n+1)$$

puis :

$$1 \leq \frac{u_{n+1}^2}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)} \left(a^2 + \frac{1}{u_1^2} \right) + \frac{2(n-1)}{n(n+1)} + 1$$

et le terme de droite tend vers 1.

Donc, par théorème d'encadrement :

$$\frac{u_{n+1}^2}{n(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \text{ donc } \frac{u_n^2}{(n-1)n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

On en déduit que $u_n^2 \sim n^2$ puis :

$$\boxed{u_n \sim n.}$$

2. a. La relation entre les deux suites donne pour tout $n \geq 0$:

$$a_n = u_n u_{n+1} - u_n^2.$$

Si la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers ℓ alors :

$$u_n u_{n+1} - u_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc } \boxed{a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.}$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En élevant au carré la relation de récurrence vérifiée par la suite, on a :

$$u_{n+1}^2 = u_n^2 + 2a_n + \frac{a_n^2}{u_n^2}$$

d'où :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(2a_k + \frac{a_k^2}{u_k^2} \right)$$

puis par télescopage :

$$u_n^2 - u_0^2 = 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k^2}{u_k^2}$$

or $u_0 = a_0$ donc :

$$u_n^2 = a_0^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k^2}{u_k^2} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_k.$$

c. Tout d'abord, la relation précédente donne :

$$\forall n \geq 1, 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_k \leq u_n.$$

• Si la suite (u_n) converge alors elle est bornée donc il en est de même de la suite des sommes partielles de la série $\sum a_n$ or il s'agit d'une série à termes positifs donc cette série converge.

• Réciproquement, supposons la série $\sum a_n$ convergente. En particulier, on a : $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On en déduit que $0 \leq a_n^2 \leq a_n$ à partir d'un certain rang donc la série $\sum a_n^2$ converge.

Par ailleurs, une récurrence facile montre que la suite (u_n) est croissante donc minorée par u_0 ce qui conduit à l'inégalité :

$$u_n^2 \leq a_0^2 + \frac{1}{u_0^2} \sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 + 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

et la convergence des séries $\sum a_n$ et $\sum a_n^2$ montre que la suite (u_n^2) est majorée donc la suite (u_n) est majorée or elle est croissante donc elle converge.

Donc la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge.

d. Puisque $0 < r < 1$, la série $\sum r^k$ converge donc, d'après la question précédente, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge. On note ℓ sa limite.

On a pour tout $n \geq 1$:

$$u_n^2 = a_0^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k^2}{u_k^2} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

d'où par passage à la limite :

$$\ell^2 = a_0^2 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k^2}{u_k^2} + 2 \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

et par différence de ces deux dernières relations :

$$\ell^2 - u_n^2 = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k^2}{u_k^2} + 2 \sum_{k=n}^{+\infty} r^k$$

soit :

$$\ell^2 - u_n^2 = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k^2}{u_k^2} + 2 \frac{r^n}{1-r}$$

d'où :

$$\frac{(\ell^2 - u_n^2)(1-r)}{2r^n} = \frac{1-r}{2r^n} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k^2}{u_k^2} + 1.$$

On a :

$$0 \leq \frac{1-r}{2r^n} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k^2}{u_k^2} \leq \frac{1-r}{2r^n} \frac{1}{u_0^2} \sum_{k=n}^{+\infty} r^{2k} = \frac{1-r}{2r^n} \frac{1}{u_0^2} \frac{r^{2n}}{1-r^2}$$

ce qui conduit à :

$$1 \leq \frac{(\ell^2 - u_n^2)(1-r)}{2r^n} \leq 1 + \frac{1}{2r^n} \frac{1}{u_0^2} \frac{r^{2n}}{1+r}.$$

Le terme de droite tend vers 1 donc, par théorème d'encadrement :

$$\frac{(\ell^2 - u_n^2)(1-r)}{2r^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \text{ i.e. } \ell^2 - u_n^2 \sim \frac{2r^n}{1-r}.$$

Exercice 2 (d'après oral Mines-Ponts PSI)

1. Étudier les variations (en précisant les limites aux bornes) de la fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.
2. Pour tout entier $n \geq 3$, on considère l'équation $e^x - x^n = 0$.
En exploitant la fonction f , montrer que l'équation ci-dessus admet deux solutions dans $]0, +\infty[$; on les note u_n et v_n avec $0 \leq u_n \leq v_n$.
3.
 - a. Montrer que : $\forall n \geq 3, n < v_n < n^2$.
 - b. Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n \geq 3}$?
 - c. Montrer que : $\forall n \geq 3, v_n = n \ln(n) + n \ln(\ln(v_n))$.
 - d. En déduire que : $v_n \sim n \ln(n)$.
4. Soit $g :]-\infty, \frac{1}{e}[\rightarrow]0, e[$ la fonction réciproque de la restriction de la fonction f à l'intervalle $]0, e[$.
 - a. Exprimer u_n à l'aide de g et en déduire la limite, notée α , de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$.
 - b. Calculer $g'(0)$.
 - c. En déduire que l'on a :

$$u_n = \alpha + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

CORRECTION –

1. Les fonctions $\ln$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont dérivables sur $]0, +\infty[$ donc, par produit, f est dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour tout $x > 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - 1 \times \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

d'où le tableau de variations de f :

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$		$\frac{1}{e}$	0

2. On note que x doit être strictement positif pour être solution de l'équation, qui est donc équivalente à $x = \ln(x^n) = n \ln x$, ou encore à :

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{n} \quad \text{i.e.} \quad f(x) = \frac{1}{n}.$$

- La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0, e]$ donc f réalise une bijection de $]0, e]$ sur $f(]0, e]) =]-\infty, 1/e]$.
Puisque $n \geq 3$, on a $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{e}$ donc il existe un unique réel, noté u_n , dans $]0, e]$, qui soit solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$.
- La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[e, +\infty[$ donc f réalise une bijection de $[e, +\infty[$ sur $f([e, +\infty[) =]0, 1/e]$.
Puisque $n \geq 3$, on a $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{e}$ donc il existe un unique réel, noté v_n , dans $[e, +\infty[$, qui soit solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$.

3.
 - a. Soit $n \geq 3$.

On a $n \in]e, +\infty[$ et $\ln(n) > 1$ donc $f(n) > \frac{1}{n} = f(v_n)$.

La décroissance de f sur $[e, +\infty[$ montre donc que $n < v_n$.

D'autre part, on a :

$$f(n^2) = \frac{\ln(n^2)}{n^2} = \frac{2 \ln(n)}{n^2} \quad \text{i.e.} \quad f(n^2) = \frac{1}{n} \frac{2 \ln(n)}{n} < \frac{1}{n}$$

donc $v_n < n^2$.

On a donc, pour tout entier $n \geq 3, n < v_n < n^2$.

b. Puisque $n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, il résulte de l'inégalité précédente et du théorème de minoration que :

$$\boxed{v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.}$$

c. La relation $f(v_n) = \frac{1}{n}$ se réécrit $n \ln(v_n) = v_n$ d'où $n \ln(n \ln(v_n)) = v_n$ puis :

$$v_n = n \left(\ln(n) + \ln(\ln(v_n)) \right) \text{ i.e. } \boxed{v_n = n \ln(n) + n \ln(\ln(v_n)).}$$

d. Comme $v_n < n^2$, on a avec la question précédente :

$$\begin{aligned} 0 < \frac{v_n}{n \ln(n)} &\leq 1 + \frac{n \ln(\ln(n^2))}{n \ln(n)} \\ &\leq 1 + \frac{\ln(2 \ln(n))}{\ln(n)} \\ &\leq 1 + \frac{\ln(2) + \ln(\ln(n))}{\ln(n)} \end{aligned}$$

or, par croissances comparées et par composition de limites, on a :

$$\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

donc, par théorème d'encadrement :

$$\frac{v_n}{n \ln(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

donc :

$$\boxed{v_n \sim n \ln n.}$$

4. a. On a $0 < u_n < e$ et $f(u_n) = \frac{1}{n}$ donc : $\boxed{u_n = g\left(\frac{1}{n}\right).}$

Par continuité de g , on a : $g\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} g(0).$

Par ailleurs, $f(1) = 0$ donc $g(0) = 1$ donc : $\boxed{u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1.}$

b. On a $g'(0) = \frac{1}{f'(g(0))}$. On en déduit :

$$f'(g(0)) = \frac{1 - \ln(1)}{1^2} = 1 \text{ puis } \boxed{g'(0) = 1.}$$

c. Puisque g est la réciproque d'une fonction dérivable, c'est aussi son cas et l'on peut écrire un développement limité à l'ordre 1 :

$$g(x) \underset{0}{=} g(0) + x g'(0) + o(x) \text{ i.e. } g(x) \underset{0}{=} 1 + x + o(x)$$

or $\frac{1}{n}$ tend vers 0 donc :

$$\boxed{u_n = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).}$$

Problème (d'après EM Lyon 2013)

Dans tout le problème, n est un entier tel que $n \geq 2$.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles à une colonne et n lignes, nommées « matrices colonnes » dans la suite du problème.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors tA désigne la matrice transposée de A .

Si $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors tV désigne la matrice transposée de V .

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, alors le coefficient de la ligne numéro i et de la colonne numéro j

de A est notée $a_{i,j}$, la matrice A est notée $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Si $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors la matrice colonne V est notée $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $C_j(A)$ la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

constituée des coefficients de la colonne numéro j de A . Ainsi : $C_j(A) = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n}$.

Partie I : Un exemple

Soit $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A_0 = U_0 {}^tV_0$.

1. **a.** Vérifier que 0 est valeur propre de A_0 et déterminer une base du sous-espace propre associé.

b. On suppose les instructions suivantes exécutées en Python :

```
>>> import numpy as np
>>> import numpy.linalg as al
>>> U = np.array([[1, 2, 3, 4]]).T
>>> V = np.array([[1, -1, 2, -1]]).T
```

Proposer des instructions en Python pour définir la matrice A puis vérifier que 0 est une valeur propre de A .

2. **a.** Calculer $A_0 U_0$.

b. Montrer que A_0 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

c. Déterminer une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A_0 = PDP^{-1}$.

Partie II : Trace d'une matrice carrée

3. Montrer que l'application trace $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $A \mapsto \text{tr}(A)$ est linéaire.

4. Montrer : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

5. Vérifier : $\forall A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2$.

Partie III : Une caractérisation des matrices de rang 1

6. Soit $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux matrices colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

a. Justifier que : $U {}^tV \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Déterminer les coefficients de $U {}^tV$ à l'aide des coefficients de U et de V .

b. Exprimer $\text{tr}(U {}^tV)$ à l'aide des coefficients de U et de V .

c. Quel est le rang de $U {}^tV$?

7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

a. Montrer qu'il existe $j_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $\alpha_j \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A).$$

b. En déduire qu'il existe deux matrices colonnes non nulles U et V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U {}^tV$.

8. Énoncer une caractérisation des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

Partie IV : Une caractérisation des matrices de rang 1 diagonalisables

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. On note U et V deux matrices colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

telles que $A = U {}^tV$ et on note $a = \text{tr}(A)$.

9. Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

10. Montrer : ${}^tVU = (a)$, puis : $A^2 = aA$.

11. Montrer que si $a = 0$, alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

12. On suppose $a \neq 0$. Calculer AU . Déduire des questions précédentes que A est diagonalisable.

13. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 soit diagonalisable.

Partie V : Autour d'une matrice symétrique

On considère une matrice colonne $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\sum_{j=1}^n v_j^2 = 1$. On note $S = V^t V$.

14. Montrer que S est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $S^2 = S$.
15. Montrer que l'application $\Phi : M \mapsto SM$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \operatorname{tr}({}^t \Phi(M)N) = \operatorname{tr}({}^t M \Phi(N)).$$
16. Vérifier que $\Phi^2 = \Phi$. Que peut-on dire des valeurs propres de Φ ?
17. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\ker(\Phi)$ et $\ker(\Phi - \operatorname{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie VI : Une application en probabilités

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On suppose de plus : $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$.

On note, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $m_{i,j} = \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j))$, puis :

$$M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad U_X = (\mathbb{P}(X = i))_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

$$\text{et } U_Y = (\mathbb{P}(Y = i))_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

18. On suppose, dans cette question, que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
Calculer $U_X^t U_Y$. En déduire que la matrice M est de rang 1.
19. On suppose, dans cette question, que la matrice M est de rang 1.
 - a. Montrer : $C_1(M) + \dots + C_n(M) = U_X$.
 - b. En déduire que, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $\beta_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j(M) = \beta_j U_X$.
 - c. Montrer : $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(Y = j) = \beta_j$.
 - d. En déduire que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

CORRECTION –

$$1. \text{ a. On a } A_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & -3 \\ 4 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Les deux premières colonnes sont colinéaires donc $\operatorname{rg}(A_0) < 4$ donc 0 est valeur propre de A_0 .

En fait les colonnes sont deux à deux colinéaires et la matrice est non nulle donc $\operatorname{rg}(A_0) = 1$ donc, d'après le théorème du rang, $E_0 = \ker(A_0)$ est de dimension 3.

Puisque (en notant C_i la colonne i) $C_1 + C_2 = 0$, $2C_1 - C_3 = 0$ et $C_1 + C_4 = 0$,

les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont dans E_0 or ils sont clairement (pourquoi?)

linéairement indépendants donc ils forment une base de E_0 :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_0.$$

b.

```
>>> A = np.dot(U, V.T)
>>> A
array([[ 1, -1,  2, -1],
       [ 2, -2,  4, -2],
       [ 3, -3,  6, -3],
       [ 4, -4,  8, -4]])
>>> al.matrix_rank(A) # vérification du fait que 0 est valeur propre
1
```

2. a. On $A_0 U_0 = U_0$.
- b. Puisque $U_0 \neq 0$, il s'agit d'un vecteur propre associé à la valeur propre 1 donc E_1 est de dimension au moins 1 mais on sait déjà que E_0 est de dimension 3 donc :

$$4 \leq \dim(E_0) + \dim(E_1) \leq \dim(E) = 4$$

d'où l'égalité et A_0 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

c. Notons $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ alors :

$$P^{-1}A_0P = D \text{ où } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \text{tr}(\lambda A + B) &= \sum_{i=1}^n (\lambda A + B)[i, i] \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda A[i, i] + B[i, i]) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n A[i, i] + \sum_{i=1}^n B[i, i] \\ &= \lambda \text{tr}(A) + \text{tr}(B). \end{aligned}$$

Donc l'application trace est linéaire.

4. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. On a :

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^n (AB)[i, i] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A[i, k] B[k, i] \\ &= \dots \\ &= \text{tr}(BA) \end{aligned}$$

donc $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} \text{tr}(A^t A) &= \sum_{i=1}^n (A^t A)[i, i] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A[i, j] ({}^t A)[j, i] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A[i, j] A[i, j] \end{aligned}$$

$$\text{donc } \text{tr}(A^t A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A[i, j]^2.$$

6. a. On a $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et ${}^t V \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ donc $U {}^t V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a :

$$\begin{aligned} (U {}^t V)[i, j] &= \sum_{k=1}^1 U[i, k] ({}^t V)[k, j] \\ &= u_i v_j \end{aligned}$$

$$\text{donc } U {}^t V = (u_i v_j)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

b. On a $\text{tr}(U {}^t V) = \sum_{i=1}^n (U {}^t V)[i, i]$ donc $\text{tr}(U {}^t V) = \sum_{i=1}^n u_i v_i$.

c. Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la j -ème colonne de $U {}^t V$ est :

$$C_j = \begin{pmatrix} u_1 v_j \\ u_2 v_j \\ \vdots \\ u_n v_j \end{pmatrix} \text{ donc } C_j = v_j U.$$

Considérons deux indices i et j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ avec $i \neq j$:

- si $v_j = 0$ alors C_j est nulle donc $C_j = 0 \times C_i$;
- sinon on a $C_i = \frac{v_i}{v_j} C_j$.

Donc les colonnes de $U^t V$ sont proportionnelles entre elles (et la matrice est non nulle) donc $\text{rg}(U^t V) \leq 1$.

Puisque U et V sont non nulles, il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $u_i \neq 0$ et $v_j \neq 0$ donc $(U^t V)[i, j] \neq 0$ et cette matrice est donc non nulle.

Donc $\boxed{\text{rg}(U^t V) = 1}$.

7. a. Puisque $\text{rg}(A) = 1$, A est non nulle donc l'une au moins des colonnes de A est non nulle, notons là $C_{j_0}(A)$ avec $j_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Alors, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la colonne C_j de A peut s'écrire $C_j = \alpha_j C_{j_0}(A)$ (en effet, si $C_{j_0}(A) = \beta C_j$ alors $\beta \neq 0$ puisque $C_{j_0}(A)$ est non nulle et on peut donc multiplier par $\frac{1}{\beta}$).

b. En posant $U = C_{j_0}(A)$ et $V = {}^t(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n)$, on a $\boxed{A = U^t V}$.

8. On a montré qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1 si et seulement s'il existe U et V non nulles dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U^t V$.

9. Puisque $\text{rg}(A) = 1$, on a $\text{rg}(A) < n$ donc 0 est valeur propre de A .

Le théorème du rang donne alors $\dim(E_0) = n - 1$.

10. Puisque ${}^t V \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et $U \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, on a ${}^t V U \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et :

$$\begin{aligned} ({}^t V U)[1, 1] &= \sum_{k=1}^n ({}^t V)[1, k] U[k, 1] \\ &= \sum_{k=1}^n V[k, 1] U[k, 1] \\ &= \sum_{k=1}^n u_k v_k \\ &= \sum_{k=1}^n A[k, k] \\ &= \text{tr}(A), \end{aligned}$$

donc $\boxed{{}^t V U = (a)}$.

On a :

$$\begin{aligned} A^2 &= U \underbrace{{}^t V U}_{=a} {}^t V \\ &= a U^t V \\ &= a A. \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{A^2 = aA}$.

11. La question précédente montre que $P(x) = x^2 - ax$ est un polynôme annulateur de A donc les valeurs propres de A sont parmi ses racines *i.e.* $\text{Sp}(A) \subset \{0; a\}$.

Si $a = 0$ alors il n'y a pas d'autre valeur propre que 0 mais on a vu que $\dim(E_0) = n - 1 < n$ donc $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

12. On a :

$$AU = U \underbrace{{}^t V U}_{=a} \quad \text{donc} \quad \boxed{AU = aU}.$$

Puisque $U \neq 0$, cela signifie que a est valeur propre de A (et que U est un vecteur propre associé).

On a donc $\dim(E_a) \geq 1$ et $\dim(E_0) = n - 1$ donc :

$$\dim(E_a) + \dim(E_0) = n$$

donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$

13. On a montré que si A est de rang 1 et si $\text{tr}(A) = 0$ alors A n'est pas diagonalisable (Q11).

On a montré que si A est de rang 1 et si $\text{tr}(A) \neq 0$ alors A est diagonalisable (Q12).

Donc une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.

14. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a :

$$(V^t V)[i, j] = v_i v_j = v_j v_i = (V^t V)[j, i]$$

donc $S = V^t V$ est symétrique.

De plus, on a :

$$S^2 = (V^t V)(V^t V) = V({}^t V V){}^t V$$

or ${}^t V V = \sum_{k=1}^n v_k^2 = 1$ donc on obtient :

$$S^2 = 1 \times V^t V = S.$$

On pourrait aussi calculer directement le coefficient (i, j) de S^2 :

$$\begin{aligned} S^2[i, j] &= \sum_{k=1}^n S[i, k]S[k, j] \\ &= \sum_{k=1}^n v_i v_k v_k v_j \\ &= v_i v_j \sum_{k=1}^n v_k^2 \\ &= v_i v_j \\ &= S[i, j]. \end{aligned}$$

15. Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda M + N) &= S(\lambda M + N) \\ &= \lambda(SM) + SN \\ &= \lambda\Phi(M) + \Phi(N) \end{aligned}$$

et, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $SM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Donc Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Alors :

$$\begin{aligned} \text{tr}({}^t\Phi(M)N) &= \text{tr}({}^t(SM)N) \\ &= \text{tr}({}^tM^tSN) \\ &= \text{tr}({}^tMSN) \text{ car } S \text{ est symétrique} \\ &= \text{tr}({}^tM\Phi(N)). \end{aligned}$$

16. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a (puisque $S^2 = S$) :

$$\Phi^2(M) = S(SM) = SM = \Phi(M).$$

Il s'ensuit que S est une matrice de projection donc ses valeurs propres sont 1 et 0.

17. Puisque $\ker(\Phi)$ et $\ker(\Phi - \text{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$ sont des sous-espaces propres de Φ , ils sont en somme directe.

De plus, tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit : $M = (M - \Phi(M)) + \Phi(M)$ et la relation $\Phi \circ \Phi = \Phi$ donne :

$$\Phi(M - \Phi(M)) = \Phi(M) - \Phi^2(M) = 0_n \text{ et } \Phi(\Phi(M)) = \Phi(M)$$

donc $M - \Phi(M) \in \ker \Phi$ et $M \in \ker(\Phi - \text{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$. Donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \ker(\Phi) + \ker(\Phi - \text{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$.

Donc les sous-espaces vectoriels $\ker(\Phi)$ et $\ker(\Phi - \text{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

18. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a en exploitant l'indépendance de X et Y :

$$U_X {}^t U_Y[i, j] = \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j) = \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = M[i, j].$$

Donc $M = U_X {}^t U_Y$ et, d'après Q8 M est de rang 1.

19. a. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned} (C_1(M) + \dots + C_n(M))[i] &= \sum_{j=1}^n C_j(M)[i] \\ &= \sum_{j=1}^n \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) \end{aligned}$$

et la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements formé par les $(Y = j)$ donne :

$$(C_1(M) + \dots + C_n(M))[i] = \mathbb{P}(X = i) = U_X[i]$$

donc $C_1(M) + \dots + C_n(M) = U_X$.

b. Puisque M est de rang 1, le s.e.v. F de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les $C_j(M)$ est de dimension 1.

D'après la question précédente, U_X est également dans ce s.e.v. F .

Puisque U_X est non nul (la somme de ses composantes est égale à 1), U_X est une base de F .

Donc tous les vecteurs de F s'écrivent sont colinéaires à U_X .

En particulier, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $\beta_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j(M) = \beta_j U_X$.

- c. Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Tout d'abord la somme des composantes de $C_j(\mathbf{M})$ est, d'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements formé par les $(X = i)$:

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \mathbb{P}(Y = j).$$

D'autre part, la somme des composantes de U_X est :

$$\sum_{i=1}^n \beta_j \mathbb{P}(X = j) = \beta_j \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = j) = \beta_j.$$

Donc : $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(Y = j) = \beta_j$.

- d. Les deux questions précédentes montrent que, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$C_j(\mathbf{M}) = \mathbb{P}(Y = j)U_X,$$

d'où, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = C_j(\mathbf{M})[i] = \mathbb{P}(Y = j)U_X[i] = \mathbb{P}(Y = j)\mathbb{P}(X = i).$$

Donc les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.