Consignes

- L'énoncé comporte deux exercices et un problème.
  Ces derniers peuvent être traités dans un ordre quelconque mais doivent être chacun commencés sur une nouvelle page et les questions doivent être séparées d'une ligne horizontale sur toute la largeur de la page.
- Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
- La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- Les résultats doivent être mis en valeur et les pages doivent être numérotées.

Exercice 1

1. On considère un réel $a > 0$ et la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie en posant $u_0 = a$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{n}{u_n}.$$

a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est à valeurs strictement positives et est croissante.

b. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ diverge vers $+\infty$.

c. Écrire en python une fonction `seuil(a, s)` de paramètres a et s qui considère la suite dans le cas où le premier terme vaut a et qui renvoie la plus petite valeur de n telle que $u_n >$ s. Par exemple :

```
>>> seuil(2, 10)
10
```

Cet exemple signifie que pour $a = 2$, on a $u_9 \leqslant 10$ et $u_{10} > 10$.

d. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

$$u_{n+1}^2 = a^2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{u_k^2} + n(n+1).$$

e. En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

2. On considère une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de réels strictement positifs et l'on définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ en posant $u_0 = a_0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}.$$

a. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge alors la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

b. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$u_n^2 = a_0^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k^2}{u_k^2} + 2\sum_{k=0}^{n-1} a_k.$$

c. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge.

d. On s'intéresse au cas où $a_n = r^n$ avec $r \in]0,1[$.
Justifier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vers une limite que l'on notera ℓ.
Donner un équivalent de $\ell^2 - u_n^2$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

1. Étudier les variations (en précisant les limites aux bornes) de la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$.

2. Pour tout entier $n \geqslant 3$, on considère l'équation $\mathrm{e}^x - x^n = 0$.
En exploitant la fonction f, montrer que l'équation ci-dessus admet deux solutions dans $]0,+\infty[$; on les note u_n et v_n avec $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

3. ***a.*** Montrer que : $\forall n \geqslant 3,\ n < v_n < n^2$.

b. Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$?

c. Montrer que : $\forall n \geqslant 3,\ v_n = n\ln(n) + n\ln(\ln(v_n))$.

d. En déduire que : $v_n \sim n\ln(n)$.

4. Soit $g :]-\infty, \frac{1}{\mathrm{e}}[\to]0,\mathrm{e}[$ la fonction réciproque de la restriction de la fonction f à l'intervalle $]0,\mathrm{e}[$.

a. Exprimer u_n à l'aide de g et en déduire la limite, notée α, de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.

b. Calculer $g'(0)$.

c. En déduire que l'on a :

$$u_n = \alpha + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Problème

Dans tout le problème, n est un entier tel que $n \geqslant 2$.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles à une colonne et n lignes, nommées « matrices colonnes » dans la suite du problème.
Si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors ${}^t\mathrm{A}$ désigne la matrice transposée de A.
Si $\mathrm{V} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors ${}^t\mathrm{V}$ désigne la matrice transposée de V.
Si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, alors le coefficient de la ligne numéro i et de la colonne numéro j de A est notée $a_{i,j}$, la matrice A est notée $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Si $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors la matrice colonne V est notée $\mathrm{V} = (v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Si $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on note $\mathrm{C}_j(\mathrm{A})$ la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée des coefficients de la colonne numéro j de A. Ainsi : $\mathrm{C}_j(\mathrm{A}) = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Partie I : Un exemple

Soit $\mathrm{U}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathrm{V}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A}_0 = \mathrm{U}_0{}^t\mathrm{V}_0$.

1. ***a.*** Vérifier que 0 est valeur propre de A_0 et déterminer une base du sous-espace propre associé.

b. On suppose les instructions suivantes exécutées en Python :

```
>>> import numpy as np
>>> import numpy.linalg as al
>>> U = np.array([[1, 2, 3, 4]]).T
>>> V = np.array([[1, -1, 2, -1]]).T
```

Proposer des instructions en Python pour définir la matrice A puis vérifier que 0 est une valeur propre de A.

2. ***a.*** Calculer $\mathrm{A}_0\mathrm{U}_0$.

b. Montrer que A_0 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

c. Déterminer une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A_0 = PDP^{-1}$.

Partie II : Trace d'une matrice carrée

3. Montrer que l'application trace $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ A \mapsto \mathrm{tr}(A)$ est linéaire.

4. Montrer : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

5. Vérifier : $\forall A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}({}^tAA) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2$.

Partie III : Une caractérisation des matrices de rang 1

6. Soit $U = (u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $V = (v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ deux matrices colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

a. Justifier que : $U{}^tV \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Déterminer les coefficients de $U{}^tV$ à l'aide des coefficients de U et de V.

b. Exprimer $\mathrm{tr}(U{}^tV)$ à l'aide des coefficients de U et de V.

c. Quel est le rang de $U{}^tV$?

7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

a. Montrer qu'il existe $j_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, il existe $\alpha_j \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A).$$

b. En déduire qu'il existe deux matrices colonnes non nulles U et V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U{}^tV$.

8. Énoncer une caractérisation des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

Partie IV : Une caractérisation des matrices de rang 1 diagonalisables

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. On note U et V deux matrices colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U{}^tV$ et on note $a = \mathrm{tr}(A)$.

9. Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

10. Montrer : ${}^tVU = (a)$, puis : $A^2 = aA$.

11. Montrer que si $a = 0$, alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

12. On suppose $a \neq 0$. Calculer AU. Déduire des questions précédentes que A est diagonalisable.

13. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 soit diagonalisable.

Partie V : Autour d'une matrice symétrique

On considère une matrice colonne $V = (v_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} v_j^2 = 1$. On note $S = V{}^tV$.

14. Montrer que S est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $S^2 = S$.

15. Montrer que l'application $\Phi : M \longmapsto SM$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie :

$$\forall (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \mathrm{tr}({}^t\Phi(M)N) = \mathrm{tr}({}^tM\Phi(N)).$$

16. Vérifier que $\Phi^2 = \Phi$. Que peut-on dire des valeurs propres de Φ ?

17. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\ker(\Phi)$ et $\ker(\Phi - \mathrm{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie VI : Une application en probabilités

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On suppose de plus : $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

On note, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $m_{i,j} = \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j))$, puis :

$$M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ U_X = (\mathbb{P}(X = i))_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } U_Y = (\mathbb{P}(Y = i))_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

18. On suppose, dans cette question, que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
Calculer $U_X {}^t U_Y$. En déduire que la matrice M est de rang 1.

19. On suppose, dans cette question, que la matrice M est de rang 1.

a. Montrer : $C_1(M) + \cdots + C_n(M) = U_X$.

b. En déduire que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe $\beta_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j(M) = \beta_j U_X$.

c. Montrer : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(Y = j) = \beta_j$.

d. En déduire que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.