

Consignes

- L'énoncé comporte trois exercices.
Ces derniers peuvent être traités dans un ordre quelconque mais doivent être chacun commencés sur une nouvelle page et les questions doivent être séparées d'une ligne horizontale sur toute la largeur de la page.
- Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
- La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- Les résultats doivent être mis en valeur et les pages doivent être numérotées.

Exercice 1

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_k[x]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$ formé des polynômes de degré au plus k . On définit l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}_4[x] ; P(0) = P(4) = 0\}$ et le polynôme $W(x) = x(x-4)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_4[x]$.
2. Montrer que E est de dimension 3 et en déterminer une base.
3. Montrer que, pour tout $Q \in \mathbb{R}_2[x]$, on a $WQ \in E$.
4. Montrer que l'application $\phi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow E$, $Q \mapsto WQ$ est un isomorphisme.
5. Pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[x]$, on considère le polynôme :

$$\Delta(Q)(x) = Q(x+1) - Q(x).$$

Par exemple, si $Q(x) = x^2 - 3x + 5$, alors :

$$\Delta(Q)(x) = ((x+1)^2 - 3(x+1) + 5) - (x^2 - 3x + 5).$$

- a. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
 - b. Déterminer pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[x]$ le degré du polynôme $\Delta(Q)$ en fonction de celui de Q .
 - c. Déterminer la matrice A de Δ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$.
 - d. Déterminer le noyau et l'image de Δ .
 - e. Établir : $\Delta \circ \Delta \circ \Delta = 0$.
6. On définit l'endomorphisme f de E suivant : $f = \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}$, où ϕ^{-1} est l'application réciproque de ϕ .
 - a. Montrer que $f \circ f \circ f = 0$.
 - b. Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f .
 - c. Démontrer que f admet une valeur propre et une seule et la déterminer.
 - d. Est-ce que f est diagonalisable?

Exercice 2

Partie I

Dans cette partie, x désigne un réel de $[0, 1[$.

1. *a.* Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N}, 0 \leq \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} dt \leq \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}$.

b. En déduire que : $\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} dt \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$.

2. *a.* Pour tout réel t de $[0, 1[$ et pour tout k élément de $\mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}$.

b. En déduire que : $\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt$.

c. Utiliser la question 1 pour montrer que la série de terme général $\frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et exprimer

$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

d. Conclure que : $\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt$.

On admet sans démonstration que l'on a aussi : $\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2} dt$.

Partie II

Un joueur réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce. Cette pièce donne pile avec la probabilité p ($0 < p < 1$) et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier pile.

Si N prend la valeur n , le joueur place n boules numérotées de 1 à n dans une urne, puis il extrait une boule au hasard de cette urne. On dit que le joueur a gagné si le numéro porté par la boule tirée est impair et on désigne par A l'événement : « le joueur gagne ». On appelle X la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule extraite de l'urne.

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ modélisant cette expérience.

3. Reconnaître la loi de N .

4. *a.* Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à j , la valeur de $\mathbb{P}_{(N=2j)}(X = 2k + 1)$.

b. Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à $j + 1$, la valeur de $\mathbb{P}_{(N=2j+1)}(X = 2k + 1)$.

c. Déterminer $\mathbb{P}_{(N=2j)}(X = 2k + 1)$ lorsque k appartient à $\llbracket 0, j - 1 \rrbracket$.

d. Déterminer $\mathbb{P}_{(N=2j+1)}(X = 2k + 1)$ lorsque k appartient à $\llbracket 0, j \rrbracket$.

5. *a.* Justifier que $\mathbb{P}(X = 2k + 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) \mathbb{P}_{(N=n)}(X = 2k + 1)$.

b. En admettant que l'on puisse scinder la somme précédente selon la parité de n , montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = 2k + 1) = \frac{p}{q} \left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1} \right)$$

c. En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = 2k + 1) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t} dt$.

6. **a.** Montrer que : $\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

b. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = 2k+1) = \frac{p}{q} \left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} dt \right)$$

c. En déduire que : $\mathbb{P}(A) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} dt$.

7. **a.** Trouver trois constantes réelles a , b et c telles que, pour tout t différent de 1 et de -1 , on ait :

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2}$$

b. Écrire $\mathbb{P}(A)$ explicitement en fonction de q .

c. En déduire que $\mathbb{P}(A) > \frac{1}{2}$.

Exercice 3

Dans tout le problème, on note E l'ensemble des fonctions $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}^+$ et vérifiant :

$$\exists p \in \mathbb{N} / \frac{u(t)}{t^p} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

On remarquera que l'entier p dépend *a priori* de la fonction u considérée.

Partie 1 – Définition de la transformée de Laplace

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2. Soit u un élément de E . Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[: t^2 u(t) e^{-xt} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

3. En déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} u(t) e^{-xt} dt$ est convergente.

Dans toute la suite du problème, pour toute fonction u de E , on définit la fonction $L(u)$ sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, L(u)(x) = \int_0^{+\infty} u(t) e^{-xt} dt.$$

4. Montrer que : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (u, v) \in E^2, L(\alpha u + v) = \alpha L(u) + L(v)$.

Partie 2 – Quelques exemples

5. Soit $a \in \mathbb{R}^{**}$ fixé. On considère pour tout i dans $\{0, 1, 2\}$ la fonction $v_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, v_i(t) = t^i e^{-at}.$$

Pour tout i dans $\{0, 1, 2\}$, montrer que v_i appartient à E .

6. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On considère la fonction $w_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, w_n(t) = t^n.$$

a. Montrer que la fonction w_n appartient à E .

b. Montrer pour tout x de $]0, +\infty[$ que $L(w_n)(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}$.

Partie 3 – Propriétés des transformées de Laplace

7. Limite de $L(u)$ en $+\infty$:

Soit $u \in E$. Justifier qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^+$ et $M \in \mathbb{R}^+$ tels que :

$$\forall t \in [A, +\infty[, |u(t)| \leq t^p \text{ et } \forall t \in [0, A] , |u(t)| \leq M .$$

En déduire : $L(u)(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

8. Limite de $L(u)$ en 0 :

Soit u un élément de E tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} u(s) ds$ converge.

On note, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $R(t) = \int_t^{+\infty} u(s) ds$.

a. Déterminer la limite en $+\infty$ de R . Montrer que R appartient à E .

b. Montrer que R est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et que : $\forall t \in \mathbb{R}^+, R'(t) = -u(t)$.

c. En déduire : $\forall x \in]0, +\infty[, L(u)(x) = R(0) - xL(R)(x)$.

d. Soit $\varepsilon \in]0, +\infty[$. Justifier qu'il existe $B \in [0, +\infty[$ tel que : $\forall t \in [B, +\infty[, |R(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

En déduire : $\forall x \in]0, +\infty[, |L(u)(x) - R(0)| \leq x \int_0^B |R(t)| dt + \frac{\varepsilon}{2}$.

e. Montrer que : $L(u)(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} u(t) dt$.

9. Transformée de Laplace d'une dérivée :

Soit $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ telle que $u' \in E$.

a. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $A \in [0, +\infty[$ tels que : $\forall t \in [A, +\infty[, |u(t)| \leq |u(A)| + \frac{t^{p+1}}{p+1}$.

b. En déduire que u appartient à E .

c. Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[, L(u')(x) = -u(0) + xL(u)(x)$.

10. Dérivée d'une transformée de Laplace.

Soit u un élément de E . On considère, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ , u_n(t) = t^n u(t).$$

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n appartient à E .

b. Montrer : $\forall a \in \mathbb{R}, |e^a - 1 - a| \leq \frac{a^2}{2} e^{|a|}$.

c. Soit $x \in]0, +\infty[$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tels que : $|h| \leq \frac{x}{2}$.

Montrer que :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \left| \frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} + t e^{-xt} \right| \leq |h| \frac{t^2}{2} \exp(-xt/2).$$

En déduire :

$$\left| \frac{L(u)(x+h) - L(u)(x)}{h} + L(u_1)(x) \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 |u(t)| \exp(-xt/2) dt.$$

d. Montrer que $L(u)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer $(L(u))'$ en fonction de $L(u_1)$.