Notions abordées et objectifs

- *Suites réelles*
  - Révision de tout le programme de première année.
  - Complément : lemme de Cesaro.
- *Intégration sur un segment :*
  - Révision de tout le programme de première année.
- *Séries :*
  - Révision de tout le programme de première année.
  - Complément : séries alternées.
- *Intégrales généralisées*
  - Révision de tout le programme de première année.
  - Complément : fonction Γ.

► **Note aux colleurs :**

- Les questions de cours portent plutôt sur la partie «suites et fonctions» mais les exercices devront principalement porter sur les séries ou les intégrales généralisées avec pour commencer une étude de convergence de série ou d'intégrale.
- Le lemme de Cesaro et le critère des séries alternées sont hors-programme mais peuvent être utilisés en colle en en rappelant les énoncés.

► **Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :**

1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto x + 1 - \ln(x)$.
On définit la suite u en posant $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \geqslant 2$.
b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [2,3]$.
c. Montrer que, pour tout $x \in [2,3]$, on a : $|f(x) - \mathrm{e}| \leqslant \dfrac{2}{3}|x - \mathrm{e}|$.
d. Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite ℓ.
e. Écrire un programme Python afin d'obtenir une valeur approchée de ℓ à 10^{-7} près.

2. Pour tout entier $p \geqslant 3$, on considère la fonction $f_p : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^p - px + 1$.

a. Étudier les variations de f_p sur $[0,1]$ et en déduire que l'équation $f_p(x) = 0$ admet une et une seule solution dans $]0,1[$; on note x_p cette solution.
b. Montrer que $f_{p+1}(x_p) < 0$ et en déduire le sens de variation de la suite (x_p) puis que cette suite converge.
c. Montrer que $x_p \sim \frac{1}{p}$.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 2$, $u_2 = 1$ et : $\forall n \geqslant 2,\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n\sqrt{u_n u_{n-1}}}$.
On admet que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie et strictement positive.

a. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
b. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.
c. Prouver que la suite $\left(\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}\right)$ converge vers 2.
d. En utilisant le lemme de Cesàro, en déduire que $u_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Calculer I_0 et I_1.
b. Montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement positive et décroissante.
c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $(n+2)\mathrm{I}_{n+2} = (n+1)\mathrm{I}_n$.
d. Démontrer que : $\mathrm{I}_{n+1} \sim \mathrm{I}_n$.

5. Définir la fonction Γ, déterminer son domaine de définition puis montrer la relation liant $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$.

6. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

a. Montrer qu'il existe un réel M tel que : $\forall t \in [a,b], |f(t)| \leqslant \mathrm{M}$ et $\left|f'(t)\right| \leqslant \mathrm{M}$.
b. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0.$$