Problème 2 - Ecricome 2020

Le rapport du jury et la correction sont disponibles à l'adresse : https://urls.fr/TlGYFh

Problème 3 - AgroVeto BCPST 2016

On considère la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{\ln(k)}{k}$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$.

1. ***a.*** Dresser le tableau de variations de la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.

b. En déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 4, on a :

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

c. En déduire l'existence de trois constantes réelles positives A, B et C telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, on ait :

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - A \leqslant S_n - B \leqslant \frac{\ln^2(n)}{2} - C.$$

d. Que peut-on en déduire sur la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{\ln(k)}{k}$?

2. Recherche d'un équivalent de S_n.

a. Montrer que :

$$\ln^2(n+1) \sim \ln^2(n).$$

b. En déduire que :

$$S_n \sim \frac{1}{2}\ln^2(n).$$

3. On considère la suite u définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = S_n - \frac{1}{2}\ln^2(n).$$

a. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

b. En déduire que la suite u converge.

Dans la suite de l'exercice, la limite de la suite u sera notée ℓ.

4. On considère la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k}.$$

a. Prouver que pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$A_{2n} = S_{2n} - S_n - \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

b. On admet qu'il existe un réel γ tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma.$$

En déduire que la suite $(A_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite en fonction de γ.

c. En déduire que la suite $(A_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite en fonction de γ.

d. Que peut-on en déduire sur la série $\sum_{k\geqslant 1} (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k}$.

Éléments de correction –

1. ***a.*** Les fonctions ln et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par produit c'est également le cas de la fonction f donnée par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ et l'on a pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$

Cela permet de dresser le tableau de variations de cette fonction en faisant apparaître la valeur e :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

b. Soit $k \geqslant 4$, de sorte que $k-1 > \mathrm{e}$. Le fait que f soit décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$ permet d'écrire :

$$\forall x \in [k, k+1],\ \frac{\ln(x)}{x} \leqslant \frac{\ln(k)}{k},$$

et :

$$\forall x \in [k-1, k],\ \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \frac{\ln(x)}{x}.$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit respectivement :

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\ln(k)}{k}\mathrm{d}x,$$

et :

$$\int_{k-1}^{k} \frac{\ln(k)}{k}\mathrm{d}x \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire :

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{\ln(k)}{k},$$

et :

$$\frac{\ln(k)}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x,$$

et l'on a bien :

$$\boxed{\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x.}$$

c. Soit n un entier supérieur ou égal à 4, on déduit de la question précédente :

$$\forall k \in [\![4, n]\!],\ \int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x,$$

d'où, en sommant :

$$\sum_{k=4}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \sum_{k=4}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire en invoquant la relation de Chasles :

$$\int_4^{n+1} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{S}_n - 0 - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(3)}{3} \leqslant \int_3^{n} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

On remarque maintenant qu'une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)\frac{1}{x}$ est $x \mapsto \frac{1}{2}\ln^2(x)$, d'où :

$$\left[\frac{1}{2}\ln^2(x)\right]_4^{n+1} \leqslant \mathrm{S}_n - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(3)}{3} \leqslant \left[\frac{1}{2}\ln^2(x)\right]_3^{n},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2}\ln^2(n+1) - \frac{1}{2}\ln^2(4) \leqslant \mathrm{S}_n - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(3)}{3} \leqslant \frac{1}{2}\ln^2(n) - \frac{1}{2}\ln^2(3).$$

Posons :

$$\boxed{\mathrm{A} = \frac{1}{2}\ln^2(4)\ ,\ \mathrm{B} = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)}{3} \text{ et } \mathrm{C} = \frac{1}{2}\ln^2(3),}$$

alors A, B et C sont positifs et l'on a pour tout $n \geqslant 4$:

$$\boxed{\frac{\ln^2(n+1)}{2} - \mathrm{A} \leqslant \mathrm{S}_n - \mathrm{B} \leqslant \frac{\ln^2(n)}{2} - \mathrm{C}.}$$

d. On a :

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - \mathrm{A} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

donc, par théorème de minoration :

$$\mathrm{S}_n - \mathrm{B} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

soit :

$$\boxed{\mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.}$$

2. ***a.*** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\ln(n+1) = \ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

d'où :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}.$$

On a :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et } \ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

donc :

$$\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

puis :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$

et *a fortiori* en élevant au carré :

$$\boxed{\frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.}$$

b. L'inégalité de la question **1.c.** donne pour tout entier $n \geqslant 4$:

$$\frac{1}{2}\frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} - \frac{A}{\ln^2(n)} \leqslant \frac{S_n}{\ln^2(n)} - \frac{B}{\ln^2(n)} \leqslant \frac{1}{2} - \frac{C}{\ln^2(n)},$$

or :

$$\frac{A}{\ln^2(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et } \frac{C}{\ln^2(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc, d'après la question précédente, les deux termes «encadrant» tendent vers $\frac{1}{2}$ donc, par théorème d'encadrement, on obtient :

$$\frac{S_n}{\ln^2(n)} - \frac{B}{\ln^2(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2},$$

or :

$$\frac{B}{\ln^2(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

donc :

$$\frac{S_n}{\ln^2(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2},$$

puis en multipliant par 2 :

$$\boxed{\frac{2S_n}{\ln^2(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.}$$

3. a. Considérons un entier $n \geqslant 3$, alors :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln^2(n+1)}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{ln(k)}{k} + \frac{\ln^2(n)}{2},$$

soit :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln^2(n+1)}{2} + \frac{\ln^2(n)}{2}.$$

L'inégalité de droite de la question **1.b.** donne en l'appliquant avec $n+1$:

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x,$$

soit :

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2(n)}{2},$$

d'où :

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln^2(n+1)}{2} + \frac{\ln^2(n)}{2} \leqslant 0,$$

donc :

$$\boxed{\forall n \geqslant 3,\ u_{n+1} - u_n \leqslant 0.}$$

b. L'inégalité de gauche de la question **1.c.** donne :

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2(n)}{2} - A + B \leqslant S_n - \frac{\ln^2(n)}{2},$$

or $\ln^2(n+1) \geqslant \ln^2(n)$ d'où :

$$\forall n \geqslant 4,\ -A + B \leqslant u_n.$$

La suite u est donc minorée et, d'après la question précédente, décroissante.

On en déduit que $\boxed{\text{la suite } u \text{ converge.}}$

4. a. Démontrons par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$, la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : «A_{2n} = S_{2n} - S_n - \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}».$$

• Pour $n = 1$, on a :

$$A_2 = (-1)^{1-1}\frac{\ln(1)}{1} + (-1)^{2-1}\frac{\ln(2)}{2} = -\frac{1}{2}\ln(2),$$

et :

$$S_2 - S_1 - \ln(2)\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k} = \frac{\ln(2)}{2} - \ln(2)\frac{1}{1} = -\frac{1}{2}\ln(2),$$

d'où $\mathcal{P}(1)$.

• Soit $n \geqslant 1$ tel que l'on ait $\mathcal{P}(n)$. Montrons que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.

On a :

$$A_{2(n+1)} = A_{2n} + (-1)^{2n+1-1}\frac{\ln(2n+1)}{2n+1} + (-1)^{2n+2-1}\frac{\ln(2n+2)}{2n+2},$$

soit :

$$A_{2(n+1)} = A_{2n} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} - \frac{\ln(2n+2)}{2n+2},$$

puis :

$$A_{2(n+1)} = A_{2n} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} + \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} - 2\frac{1}{2}\frac{\ln(2)+\ln(n+1)}{n+1},$$

c'est-à-dire :

$$A_{2(n+1)} = A_{2n} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} + \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} - \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{\ln(n+1)}{n+1},$$

puis en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$A_{2(n+1)} = S_{2n} - S_n - \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} + \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} - \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{\ln(n+1)}{n+1},$$

d'où :

$$A_{2(n+1)} = S_{2n+2} - S_{n+1} - \ln(2)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k},$$

et on a donc $\mathcal{P}(n+1)$.

• On a :

$$\mathcal{P}(1) \text{ et } \forall n \geqslant 1, \Big(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)\Big),$$

donc, par récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_{2n} = S_{2n} - S_n - \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.}$$

b. Tout d'abord, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
S_{2n} - S_n &= u_{2n} + \frac{\ln^2(2n)}{2} - u_n - \frac{\ln^2(n)}{2} \\
&= u_{2n} - u_n + \frac{\big(\ln(2)+\ln(n)\big)^2}{2} - \frac{\ln^2(n)}{2} \\
&= u_{2n} - u_n + \frac{\ln^2(2)}{2} + \ln(2)\ln(n).
\end{aligned}$$

La relation de la question précédente donne alors :

$$\begin{aligned}
A_{2n} &= u_{2n} - u_n + \frac{\ln^2(2)}{2} + \ln(2)\ln(n) - \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \\
&= u_{2n} - u_n + \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right).
\end{aligned}$$

Comme la suite u converge vers ℓ, il en est de même de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'où :

$$A_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - \ell + \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2)\gamma,$$

soit :

$$\boxed{A_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2)\gamma.}$$

c. Tout d'abord, on a :

$$\begin{aligned}
A_{2n+1} &= \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k} \\
&= A_{2n} + (-1)^{2n+1-1}\frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \\
&= A_{2n} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1},
\end{aligned}$$

or, par croissances comparées :

$$\frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

d'où, d'après la question précédente :

$$\boxed{A_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2)\gamma.}$$

d. Puisque les suites $(A_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(A_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite, on en déduit que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge également vers cette limite :

$$\boxed{A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2)\gamma.}$$