

# TD 5 – Problèmes d'analyse

## Problème 1 - Ecricome 2025

1. *a.* Justifier que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  converge.
- b.* Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$  converge.
- c.* Montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$  converge.

On note :

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

2. Montrer que  $A - B = 2C$  et  $A = C + \frac{1}{4}A$ .
3. *a.* Montrer que, pour tout couple  $(\alpha, \beta)$  de réels,  $2 \cos(\alpha) \cos(\beta) = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$ .
- b.* Montrer par récurrence sur  $n$  que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \left[0, \pi\right], \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) = -\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

4. On considère deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $a < b$  et une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ .
- a.* Montrer qu'il existe un réel  $M$  tel que :

$$\forall t \in [a, b], |f(t)| \leq M \quad \text{et} \quad |f'(t)| \leq M.$$

- b.* Montrer que :

$$\frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0.$$

- c.* À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0.$$

5. Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $]0, \pi]$  par :

$$\forall t \in ]0, \pi], \varphi(t) = \frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

- a.* Justifier que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, \pi]$  et déterminer  $\varphi'$ .
- b.* Déterminer  $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t)$  et en déduire que  $\varphi$  se prolonge par continuité en 0.

On notera encore  $\varphi$  la fonction ainsi prolongée.

- c.* Montrer que  $\varphi$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, \pi]$ .
- d.* Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, \pi[$  par :

$$\forall t \in [0, \pi[, f(t) = \frac{\pi - t}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

On admet que  $\forall t \in [0, \pi[, f(t) = \varphi(\pi - t)$ .

Justifier que la fonction  $f$  se prolonge en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, \pi]$ .

6. *a.* Montrer que, pour tout entier naturel  $k$  non nul,  $\int_0^\pi (\pi - t) \cos(kt) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ \frac{2}{k^2} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$

**b.** En déduire, pour tout entier naturel  $N$  non nul, que :

$$\int_0^\pi \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k (\pi - t) \cos(kt) dt = -2 \sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

**7. a.** Montrer que  $C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ .

**b.** En déduire les valeurs de  $A$  et  $B$ .

## Problème 2 - Ecricome 2020

Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de réels. Si la série numérique de terme général  $u_n$  converge, on dit qu'elle converge à l'ordre 1 et on note alors  $(R_{1,n})_{n \geq 0}$  la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Si à nouveau la série de terme général  $R_{1,n}$  converge, on dit que la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge à l'ordre 2 et note  $(R_{2,n})_{n \geq 0}$  la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k}.$$

Plus généralement, pour tout entier  $p \geq 2$ , si la série de terme général  $R_{p-1,n}$  converge, on dit que la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge à l'ordre  $p$  et on note alors  $(R_{p,n})_{n \geq 0}$  la suite des restes de cette série :

$$R_{p,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p-1,k}.$$

On peut noter : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $R_{0,n} = u_n$ .

Le but de cet exercice est d'étudier, sur certains exemples, l'ordre de la convergence de la série de terme général  $u_n$ .

**1.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On considère, dans cette question uniquement, que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ .

**a.** Rappeler la condition nécessaire et suffisante sous laquelle  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge.

On se place désormais sous cette condition.

**b.** Pour tout entier  $k \geq 2$ , justifier que :

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}.$$

**c.** En déduire que pour tout  $n \geq 1$  :

$$\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

**d.** En déduire que :

$$R_{1,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

**e.** Sous quelle condition nécessaire et suffisante sur  $\alpha$ , la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge-t-elle à l'ordre 2 ?

**f.** Conjecturer à quel ordre la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge.

2. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $u_n = \frac{1}{n^n}$ .

a. Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge.

b. Montrer que, pour tout  $k \geq 3$ ,  $u_k \leq \frac{1}{3^k}$ , puis en déduire que, pour tout  $n \geq 2$  :

$$0 \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

c. En déduire que la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge à l'ordre 2, et que, pour tout  $n \geq 1$  :

$$0 \leq R_{2,n} \leq \frac{1}{4 \cdot 3^n}.$$

d. Montrer que, pour tout  $p \geq 1$ , la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge à l'ordre  $p$  et que pour tout  $n \geq 1$  :

$$0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$$

e. La série  $\sum_{n \geq 1} R_{n,n}$  converge-t-elle ?

3. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ .

a. Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

b. Soit  $N \in \mathbb{N}$ . En remarquant que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k dt$ , montrer que :

$$\sum_{n=0}^N u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt.$$

c. En déduire que la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge et que, pour tout  $n \geq 0$  :

$$R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt.$$

d. Montrer par récurrence que, pour tout entier  $p \geq 1$ , la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge à l'ordre  $p$  et que pour tout  $n \geq 0$  :

$$R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p} dt.$$

### Problème 3 - AgroVeto BCPST 2016

On considère la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{\ln(k)}{k}$ .

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k}$ .

1. **a.** Dresser le tableau de variations de la fonction  $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ .

**b.** En déduire que, pour tout entier  $k$  supérieur ou égal à 4, on a :

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{\ln(x)}{x} dx.$$

**c.** En déduire l'existence de trois constantes réelles positives  $A$ ,  $B$  et  $C$  telles que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 4, on ait :

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - A \leq S_n - B \leq \frac{\ln^2(n)}{2} - C.$$

**d.** Que peut-on en déduire sur la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{\ln(k)}{k}$  ?

2. Recherche d'un équivalent de  $S_n$ .

**a.** Montrer que :

$$\ln^2(n+1) \sim \ln^2(n).$$

**b.** En déduire que :

$$S_n \sim \frac{1}{2} \ln^2(n).$$

3. On considère la suite  $u$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - \frac{1}{2} \ln^2(n).$$

**a.** Montrer que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3,  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ .

**b.** En déduire que la suite  $u$  converge.

Dans la suite de l'exercice, la limite de la suite  $u$  sera notée  $\ell$ .

4. On considère la suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k}.$$

**a.** Prouver que pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a :

$$A_{2n} = S_{2n} - S_n - \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

**b.** On admet qu'il existe un réel  $\gamma$  tel que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma.$$

En déduire que la suite  $(A_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge et déterminer sa limite en fonction de  $\gamma$ .

**c.** En déduire que la suite  $(A_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge et déterminer sa limite en fonction de  $\gamma$ .

**d.** Que peut-on en déduire sur la série  $\sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k}$ .