

TD 6 – Problèmes d'analyse

Problème 2 – d'après Ecricome 2014

1. Démontrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ converge si et seulement si $x > 0$.

2. On définit la fonction Γ sur $]0, +\infty[$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Soit $x > 0$. Déterminer une relation entre $\Gamma(x+1)$, x et $\Gamma(x)$.

3. Justifier que, pour tout $x > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1} dt$ est convergente.

On admet que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]0, +\infty[, \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1} dt.$$

On pose pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

4. Montrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \Psi(x+1) - \Psi(x) = \frac{1}{x}.$$

5. *a. Lemme : inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ et à valeurs réelles.

En considérant la fonction $\lambda \mapsto \int_a^b (\lambda f + g)^2(t) dt$, montrer que l'on a :

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt}.$$

b. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, établir :

$$\forall (x, A) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \left(\int_0^A \ln(t) e^{-t} t^{x-1} dt \right)^2 \leq \left(\int_0^A (\ln(t))^2 e^{-t} t^{x-1} dt \right) \left(\int_0^A e^{-t} t^{x-1} dt \right).$$

6. Démontrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \left(\Gamma'(x) \right)^2 \leq \Gamma(x) \Gamma''(x)$$

7. En déduire que la fonction Ψ est croissante sur $]0, +\infty[$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

► On a par croissances comparées :

$$t^2 \times t^{x-1}e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ i.e. } t^{x-1}e^{-t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge donc, d'après le théorème de négligeabilité pour les intégrales, on a la convergence (absolue) de l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt.$$

► On a :

$$t^{x-1}e^{-t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$$

or l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}} dt$ converge si et seulement si $1-x < 1$ i.e. $x > 0$. D'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, on a donc :

$$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t} dt \text{ converge} \iff x > 0.$$

On en déduit :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt \text{ converge} \iff x > 0.}$$

2. Soit $x > 0$. On considère deux réels a et b avec $0 < a < b$. On pose pour tout $t \in [a, b]$:

$$\begin{cases} u(t) = t^x \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} u'(t) = xt^{x-1} \\ v(t) = e^{-t} \end{cases}.$$

Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ donc on a par intégration par parties :

$$\int_a^b t^x e^{-t} dt = \left[-t^x e^{-t} \right]_a^b + \int_a^b x t^{x-1} e^{-t} dt$$

c'est-à-dire :

$$\int_a^b t^x e^{-t} dt = a^x e^{-a} - b^x e^{-b} + x \int_a^b t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Puisque $x > 0$, on a :

$$a^x e^{-a} \xrightarrow[a \rightarrow 0^+]{} 0 \text{ et } b^x e^{-b} \xrightarrow[b \rightarrow +\infty]{} 0$$

d'où, puisque ces deux intégrales convergent :

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = 0 + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

donc $\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)}.$

3. Soit $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}$. L'application $t \mapsto (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

On a par croissances comparées :

$$t^2 (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ et } t^{1-x/2} (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1} = t^{x/2} (\ln(t))^k e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$$

c'est-à-dire :

$$(\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ et } (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{x/2-1}}\right)$$

or les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ et $\int_0^1 \frac{1}{t^{x/2-1}} dt$ convergent donc, d'après le critère de négligeabilité pour les intégrales :

$$\int_1^{+\infty} (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1} dt \text{ et } \int_0^1 (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1} dt \text{ convergent}$$

donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1} dt$ est convergente.

4. Soit $x > 0$, on a :

$$\Psi(x+1) - \Psi(x) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

La relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et le fait que Γ soit dérivable donnent :

$$1 \times \Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x)$$

puis :

$$\Psi(x+1) - \Psi(x) = \frac{\Gamma(x) + x\Gamma'(x)}{x\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

c'est-à-dire en simplifiant :

$$\Psi(x+1) - \Psi(x) = \frac{1}{x}.$$

5. a. Pour tout réel λ , on pose : $h(\lambda) = \int_a^b (\lambda f + g)^2(t) dt$ soit :

$$h(\lambda) = \lambda^2 \int_a^b f(t)^2 dt + 2\lambda \int_a^b f(t)g(t) dt + \int_a^b g(t)^2 dt.$$

► Si f est nulle alors l'inégalité de l'énoncé est claire.

► Sinon, f^2 est non nulle, positive et continue donc son intégrale est non nulle et l'expression ci-dessus est donc celle d'un polynôme de degré 2.

Puisque h est à valeurs positive, il s'ensuit que le discriminant est négatif ou nul :

$$\left(2\lambda \int_a^b f(t)g(t) dt\right)^2 - 4 \int_a^b f(t)^2 dt \times \int_a^b g(t)^2 dt \leq 0$$

ce qui signifie :

$$4\left(\lambda \int_a^b f(t)g(t) dt\right)^2 \leq 4 \int_a^b f(t)^2 dt \times \int_a^b g(t)^2 dt$$

puis en simplifiant et en prenant la valeur absolue :

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt}.$$

b. Soit $x > 0$ et $A > 0$. On considère α tel que $0 < \alpha < A$.

Les deux fonctions suivantes sont continues sur $[\alpha, A]$:

$$t \mapsto \ln(t)e^{-t/2} t^{(x-1)/2} \text{ et } t \mapsto e^{-t/2} t^{(x-1)/2}$$

donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\left(\int_{\alpha}^A \ln(t) e^{-t/2} t^{(x-1)/2} dt \right)^2 \leq \int_{\alpha}^A (\ln(t))^2 e^{-t} t^{x-1} dt \times \int_{\alpha}^A e^{-t} t^{x-1} dt$$

et, toutes les intégrales concernées étant convergentes, on peut faire tendre α vers 0 :

$$\left(\int_0^A \ln(t) e^{-t} t^{x-1} dt \right)^2 \leq \left(\int_0^A (\ln(t))^2 e^{-t} t^{x-1} dt \right) \left(\int_0^A e^{-t} t^{x-1} dt \right).$$

6. Toutes les intégrales concernées étant convergentes, on peut faire tendre A vers $+\infty$:

$$\left(\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} t^{x-1} dt \right)^2 \leq \left(\int_0^{+\infty} (\ln(t))^2 e^{-t} t^{x-1} dt \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \right).$$

autrement dit :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \left(\Gamma'(x) \right)^2 \leq \Gamma(x) \Gamma''(x).$$

7. La fonction Ψ est dérivable comme quotient de fonctions dérivables (et le dénominateur est toujours non nul) et :

$$\forall x > 0, \Psi'(x) = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'(x)^2}{\Gamma(x)^2}$$

et la question précédente montre que le numérateur est positif.

Donc la fonction Ψ est croissante sur $]0, +\infty[$.

Problème 3 – d’après EML 2017

Question préliminaire

1 ► Soit x un réel. Montrer que l’intégrale ci-dessous est convergente si et seulement si $x > \frac{1}{2}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} dt.$$

On considère maintenant la fonction H définie, pour tout réel $x > \frac{1}{2}$, par :

$$H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} dt$$

Dans tout le problème, on note I l’intervalle $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$.

Partie I : premières propriétés de la fonction H

2 ► Calculer $H(1)$.

3 ► Montrer que la fonction H est décroissante sur I .

4 ► Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, à l’aide d’une intégration par parties, que :

$$H(n) = 2n(H(n) - H(n+1)).$$

5 ► En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $H(n+1)$ en fonction de $H(n)$.

6 ► Écrire une fonction Python $H(n)$ d’argument un entier strictement positif n et qui renvoie la valeur de $H(n)$.

7 ► Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$H(n) = \frac{(2n-2)! \pi}{2^{2n-1} ((n-1)!)^2}.$$

Partie II : étude de $H(x)$ lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$

8 ► On considère la fonction :

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

9 ► Montrer que pour tout $x \in I$:

$$H(x) = \frac{4^x}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^u + e^{-u})^{2x-1}} du.$$

Indication : on utilisera pour cela un changement de variable lié à la fonction φ .

10 ► Justifier que pour tout réel $u \geq 0$, on a :

$$e^u \leq e^u + e^{-u} \leq 2e^u.$$

11 ► En déduire que, pour tout $x \in I$, on a :

$$\frac{1}{2x-1} \leq H(x) \leq \frac{4^x}{2(2x-1)}.$$

12 ► Déterminer la limite de H en $\frac{1}{2}$ et un équivalent simple de $H(x)$ quand x tend vers $\frac{1}{2}$.

Partie III : étude de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

13 ► Montrer :

$$\forall u \in [0, 1], \ln(1+u) \geq \frac{1}{2}u.$$

14 ► On admet que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$ converge et vaut $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{I}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}xt^2} dt$ converge et calculer sa valeur.

15 ► En déduire :

$$\forall x \in \mathbb{I}, 0 \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^x} dt \leq \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}xt^2} dt \leq \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

16 ► Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{I}, 0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} dt \leq \frac{1}{2x-1}.$$

17 ► En déduire la limite de H en $+\infty$.

On va maintenant préciser ce résultat en déterminant un équivalent.

18 ► Montrer que l'on a :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -\frac{3}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

19 ► On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln(H(n)) + \frac{1}{2} \ln(n)$.

À l'aide du résultat de la question précédente et d'une relation obtenue dans la partie I, déterminer un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

20 ► Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$ converge.

21 ► En déduire l'existence d'un réel K strictement positif tel que :

$$H(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{n}}.$$

22 ► Donner enfin, à l'aide de K , un équivalent simple de $H(x)$ lorsque le réel x tend vers $+\infty$.

1 ► Soit x un réel. La fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ (donc le problème de convergence de l'intégrale n'est qu'en $+\infty$).

① Pour tout $t \geq 0$, $\frac{1}{(1+t^2)^x} \geq 0$ et $\frac{1}{t^{2x}} \geq 0$

② $\frac{1}{(1+t^2)^x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2x}}$

③ l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2x}} dt$ converge si et seulement si $2x > 1$ i.e. $x > \frac{1}{2}$.

D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} dt \text{ converge si et seulement si } x > \frac{1}{2}$$

donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} dt \text{ converge si et seulement si } x > \frac{1}{2}.$$

2 ► On a :

$$H(1) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \text{ donc } H(1) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left[\text{Arctan}(t) \right]_0^X,$$

donc $\boxed{H(1) = \frac{\pi}{2}}.$

3 ► Soit $(x, x') \in I^2$ avec $x < x'$, on a :

$$\forall t \geq 0, 0 < (1+t^2)^x < (1+t^2)^{x'} \text{ donc } \frac{1}{(1+t^2)^x} > \frac{1}{(1+t^2)^{x'}},$$

d'où par croissance de l'intégrale sur l'intervalle $[0, +\infty[$ (sachant que ces intégrales convergent) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} dt \geq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^{x'}} dt \text{ i.e. } H(x) \geq H(x'),$$

donc H est décroissante sur I.

4 ► Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a > 0$, on intègre par parties l'intégrale $\int_0^a \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$.

Pour tout $t \in [0, a]$, on pose :

$$\begin{cases} u(t) = t \\ v(t) = \frac{1}{(1+t^2)^n} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v'(t) = \frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}} \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, a]$ donc on obtient par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{1}{(1+t^2)^n} dt &= \left[t \frac{1}{(1+t^2)^n} \right]_0^a - \int_0^a t \frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &= -\frac{a}{(1+a^2)^n} + 2n \int_0^a \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &= -\frac{a}{(1+a^2)^n} + 2n \int_0^a \frac{(1+t^2) - 1}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &= -\frac{a}{(1+a^2)^n} + 2n \int_0^a \frac{1}{(1+t^2)^n} dt - 2n \int_0^a \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt. \end{aligned}$$

Puisque toutes les intégrales concernées sont convergentes (puisque les entiers naturels non nuls sont dans I), on obtient en faisant tendre a vers $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = 0 + 2n \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt - 2n \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt,$$

soit :

$$\boxed{H(n) = 2n(H(n) - H(n+1)).}$$

5 ► L'expression précédente donne :

$$(1 - 2n)H(n) = -2nH(n+1) \text{ d'où } \boxed{H(n+1) = \frac{2n-1}{2n}H(n).}$$

6 ►

```
from math import pi

def H(n):
    h = pi / 2
    for k in range(1, n): # calcul de H(k+1) en fonction de H(k)
        h = (2*k-1) / (2*k) * h
    return h
```

7 ► Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^x}$ est continue, positive et non nulle donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} dt > 0$ i.e. $H(n) > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$:

$$\frac{H(k+1)}{H(k)} = \frac{2k-1}{2k},$$

d'où :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{H(k+1)}{H(k)} &= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{2k-1}{2k} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (2k-1)}{\prod_{k=1}^{n-1} 2k} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{2n-2} k}{\left(\prod_{k=1}^{n-1} 2k\right)^2} \quad (\text{on «complète» le produit}) \\ &= \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2} ((n-1)!)^2}, \end{aligned}$$

soit par télescopage du produit :

$$\frac{H(n)}{H(1)} = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2} ((n-1)!)^2},$$

or $H(1) = \frac{\pi}{2}$, d'où :

$$H(n) = \frac{(2n-2)! \pi}{2^{2n-1} ((n-1)!)^2}.$$

On peut aussi raisonner par récurrence sur l'entier n .

8 ► La fonction exponentielle et la fonction $x \mapsto -x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc, par composition et combinaison linéaire, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0,$$

donc φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Comme φ est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\varphi(\mathbb{R})$.

On a de plus :

$$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty,$$

donc $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Donc φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

9 ► Puisque $\varphi(0) = 0$, l'étude ci-dessus montre que φ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $[0, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$ donc on peut $t = \varphi(u)$, d'où $dt = \varphi'(u)du$.

Il s'ensuit que les intégrales suivantes sont de même nature :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+\varphi(u)^2)^x} \varphi'(u) du.$$

Comme la première des deux est convergente, c'est également le cas de la seconde et l'on a l'égalité :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} dt &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right)^2\right)^x} \frac{e^u + e^{-u}}{2} du \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4}(e^{2u} - 2 + e^{-2u})\right)^x} \frac{e^u + e^{-u}}{2} du \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{4^x}{(4 + e^{2u} - 2 + e^{-2u})^x} \frac{e^u + e^{-u}}{2} du \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{4^x}{(e^u + e^{-u})^{2x}} \frac{e^u + e^{-u}}{2} du,
 \end{aligned}$$

donc :

$$\forall x \in I, H(x) = \frac{4^x}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^u + e^{-u})^{2x-1}} du.$$

10 ► Soit $u \geq 0$, on a $e^{-u} \geq 0$ et $e^{-u} \leq e^u$ d'où :

$$\forall u \in [0, +\infty[, e^u \leq e^u + e^{-u} \leq 2e^u.$$

11 ► L'inégalité précédente donne pour tout $u \geq 0$:

$$\frac{1}{(2e^u)^{2x-1}} \leq \frac{1}{(e^u + e^{-u})^{2x-1}} \leq \frac{1}{(e^u)^{2x-1}},$$

puis par croissance de l'intégrale sur un intervalle $[0, a]$ avec $a > 0$:

$$\int_0^a \frac{1}{(2e^u)^{2x-1}} du \leq \int_0^a \frac{1}{(e^u + e^{-u})^{2x-1}} du \leq \int_0^a \frac{1}{(e^u)^{2x-1}} du,$$

soit :

$$\int_0^a \frac{1}{2^{2x-1}} e^{-(2x-1)u} du \leq \int_0^a \frac{1}{(e^u + e^{-u})^{2x-1}} du \leq \int_0^a e^{-(2x-1)u} du.$$

Puisque $x > \frac{1}{2}$, on a $2x - 1 > 0$ donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-(2x-1)u} du$ converge et l'on peut faire tendre a vers $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{2^{2x-1}} e^{-(2x-1)u} du \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^u + e^{-u})^{2x-1}} du \leq \int_0^{+\infty} e^{-(2x-1)u} du,$$

soit :

$$\frac{1}{2^{2x-1}} \left[-\frac{1}{2x-1} e^{-(2x-1)u} \right]_0^{+\infty} \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^u + e^{-u})^{2x-1}} du \leq \left[-\frac{1}{2x-1} e^{-(2x-1)u} \right]_0^{+\infty},$$

donc :

$$\begin{aligned}
 \frac{4^x}{2} \frac{1}{2^{2x-1}} \left[-\frac{1}{2x-1} e^{-(2x-1)u} \right]_0^{+\infty} &\leq \frac{4^x}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^u + e^{-u})^{2x-1}} du \\
 &\leq \frac{4^x}{2} \left[-\frac{1}{2x-1} e^{-(2x-1)u} \right]_0^{+\infty},
 \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{4^x}{2} \frac{1}{2^{2x-1}} \frac{1}{2x-1} \leq H(x) \leq \frac{4^x}{2} \frac{1}{2x-1},$$

soit :

$$\forall x \in I, \frac{1}{2x-1} \leq H(x) \leq \frac{4^x}{2(2x-1)}.$$

12 ► On a : $\frac{1}{2x-1} \xrightarrow{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} +\infty$.

Par minoration, on en déduit : $\boxed{H(x) \xrightarrow{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} +\infty}$.

Pour tout $x \in I$, on a d'après les inégalités de la question précédente :

$$1 \leq (2x-1)H(x) \leq \frac{4^x}{2},$$

et le majorant tend vers 1 lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$ donc, par encadrement :

$$(2x-1)H(x) \xrightarrow{x \rightarrow \frac{1}{2}} 1,$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{H(x) \underset{\frac{1}{2}}{\sim} \frac{1}{2x-1}}.$$

13 ► Considérons la fonction :

$$\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \ln(1+u) - \frac{1}{2}u.$$

Il s'agit d'une composée et somme de la fonction $\ln$ avec des fonctions affines donc ψ est dérivable sur $[0, 1]$ et :

$$\forall u \in [0, 1], \psi'(u) = \frac{1}{1+u} - \frac{1}{2} = \frac{1-u}{2(1+u)}.$$

On en déduit que ψ est croissante sur $[0, 1]$ or $\psi(0) = 0$ donc ψ est positive sur $[0, 1]$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall u \in [0, 1], \ln(1+u) \geq \frac{1}{2}u.}$$

On aurait aussi pu invoquer la concavité de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$. La corde du graphe passant par les points d'abscisses 0 et 1 a pour équation $y = \ln(2)x$ et le graphe est situé au-dessus. Puisque $\ln(2) > 0,5$, on a donc :

$$\forall u \in [0, 1], \ln(1+u) \geq \ln(2)u \geq \frac{1}{2}u.$$

14 ► Soit $x \in I$. L'application $t \mapsto \sqrt{x}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et réalise une bijection de $[0, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$ donc on peut poser $y = \sqrt{x}t$, d'où $dy = \sqrt{x}dt$.

Il s'ensuit que les intégrales suivantes sont de même nature :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}xt^2} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} \frac{1}{\sqrt{x}} dy.$$

Comme la seconde est convergente, c'est également le cas de la première et l'on a l'égalité :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}xt^2} dt &= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} \frac{1}{\sqrt{x}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\sqrt{2\pi}}{2}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}xt^2} dt \text{ converge et : } \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}xt^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.}$$

15 ► Soit $x \in I$. Tout d'abord, la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^x}$ est continue, positive et non nulle sur $[0, 1]$ donc :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^x} dt.$$

D'autre part, pour $t \in [0, 1]$, on a $t^2 \in [0, 1]$ d'où en exploitant l'inégalité de la question 7.a. :

$$\frac{1}{(1+t^2)^x} = e^{-x \ln(1+t^2)} \leq e^{-\frac{1}{2}xt^2},$$

puis, par croissance de l'intégrale (sachant qu'il s'agit de fonctions continues sur $[0, 1]$) :

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^x} dt \leq \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}xt^2} dt.$$

Enfin, la relation de Chasles donne (du fait de la convergence de ces intégrales) :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}xt^2} dt = \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}xt^2} dt + \int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}xt^2} dt.$$

Comme $t \mapsto e^{-\frac{1}{2}xt^2}$ est continue et positive, on a :

$$\int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}xt^2} dt \geq 0,$$

d'où (en utilisant le résultat de la question précédente) :

$$\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}xt^2} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}xt^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

On a donc bien :

$$\forall x \in \mathbb{I}, 0 \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^x} dt \leq \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}xt^2} dt \leq \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

16 ► Soit $x \in \mathbb{I}$, comme précédemment, l'inégalité de gauche est claire. D'autre part :

$$\forall t \geq 1, (1+t^2)^x \geq t^{2x} \text{ donc } \frac{1}{(1+t^2)^x} \leq \frac{1}{t^{2x}},$$

puis, par croissance de l'intégrale (et du fait que ces intégrales soient convergentes) :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2x}} dt$$

or :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2x}} dt = \left[-\frac{1}{2x-1} \frac{1}{t^{2x-1}} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{2x-1},$$

d'où :

$$\forall x \in \mathbb{I}, 0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} dt \leq \frac{1}{2x-1}.$$

17 ► Les termes de droite des deux questions précédentes tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$ donc, par encadrement :

$$H(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

18 ► On a :

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$

or $-\frac{1}{2n}$ et $\frac{1}{n}$ tendent vers 0 en $+\infty$ donc :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \underset{+\infty}{=} -\frac{1}{2n} - \frac{1}{2} \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

d'où :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} -\frac{1}{2} \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

puis :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} -\frac{3}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

19 ► Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \ln(H(n+1)) + \frac{1}{2} \ln(n+1) - \left(\ln(H(n)) + \frac{1}{2} \ln(n) \right) \\ &= \ln\left(\frac{H(n+1)}{H(n)}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{2n-1}{2n}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

On a donc :

$$u_{n+1} - u_n \sim -\frac{3}{8n^2}.$$

20 ► On a :

- ① pour tout $n \geq 1$, $|u_{n+1} - u_n| \geq 0$ et $\frac{3}{8n^2} \geq 0$;
- ② $|u_{n+1} - u_n| \sim \frac{3}{8n^2}$;
- ③ $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, car $2 > 1$, donc $\sum_{n \geq 1} \frac{3}{8n^2}$ converge.

D'après le théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs, on en déduit que :

$$\text{la série } \sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n) \text{ converge (absolument).}$$

21 ► Notons S la somme de la série précédente. On a :

$$\sum_{n=1}^{N-1} (u_{n+1} - u_n) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} S,$$

soit, par télescopage :

$$u_N - u_1 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} S.$$

On a pour tout $n \geq 1$:

$$u_n = \ln(H(n)) + \frac{1}{2} \ln(n) = \ln(\sqrt{n}H(n)),$$

donc :

$$\sqrt{n}H(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{S+u_1}.$$

En posant $K = e^{S+u_1}$, on a $\boxed{K > 0}$ et :

$$\sqrt{n}H(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} K \text{ donc } \boxed{H(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{n}}}.$$

22 ► Soit $x \in \mathbb{I}$, on a : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Par décroissance de la fonction H , on a donc :

$$H(\lfloor x \rfloor + 1) \leq H(x) \leq H(\lfloor x \rfloor),$$

puis :

$$\frac{\sqrt{\lfloor x \rfloor}}{\sqrt{\lfloor x \rfloor + 1}} \sqrt{\lfloor x \rfloor + 1} H(\lfloor x \rfloor + 1) \leq \sqrt{x} H(x) \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\lfloor x \rfloor}} \sqrt{\lfloor x \rfloor} H(\lfloor x \rfloor).$$

Tout d'abord, on a (compte tenu de la question précédente) :

$$\sqrt{\lfloor x \rfloor + 1} H(\lfloor x \rfloor + 1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} K \text{ et } \sqrt{\lfloor x \rfloor} H(\lfloor x \rfloor) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} K.$$

D'autre part :

$$\frac{\sqrt{\lfloor x \rfloor + 1}}{\sqrt{\lfloor x \rfloor}} = \sqrt{1 + \frac{1}{\lfloor x \rfloor}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1,$$

et :

$$1 \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{[x]}} \leq \sqrt{1 + \frac{1}{[x]}},$$

d'où par encadrement :

$$\sqrt{\frac{x}{[x]}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

Finalement, par encadrement, on a :

$$\sqrt{x} H(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} K \quad i.e. \quad \boxed{H(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{x}}}.$$