TD 6 – Problèmes d'analyse

Problème 1 - d'après Ecricome 2009

Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par la formule suivante :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t.$$

1. *Domaine de définition de f.*

a. Rappeler, sans démonstration, à quelle condition l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t$ est convergente et donner sa valeur.

b. Soit x un réel fixé. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t$.

Par conséquent, f est définie sur $\mathbb{R}$ et elle est clairement paire. On va donc l'étudier sur $[0,+\infty[$.

2. *Branche infinie de la courbe représentative de f.*

a. Vérifier l'encadrement suivant, pour tout réel x strictement positif et pour tout réel t positif ou nul :

$$x\mathrm{e}^t \leqslant \sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}} \leqslant x\mathrm{e}^t + \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2x}.$$

b. Prouver que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$x \leqslant f(x) \leqslant x + \frac{1}{6x}.$$

c. Préciser alors la nature de la branche infinie de la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

3. *Dérivabilité et monotonie de f.*

a. À l'aide du changement de variable $u = x\mathrm{e}^t$, que l'on justifiera, prouver la formule suivante lorsque x est un réel strictement positif :

$$f(x) = x^2\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\mathrm{d}u.$$

b. Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que sa dérivée est donnée, pour tout réel x strictement positif, par :

$$f'(x) = \frac{2f(x)-\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

c. Justifier, pour tout réel x strictement positif, l'égalité suivante :

$$2f(x) = \sqrt{1+x^2} + x^2\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}.$$

d. En déduire que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

4. *Étude de f et f' en 0.*

a. Justifier que la formule suivante est valable pour tout réel x strictement positif :

$$\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty}\frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\mathrm{d}u$$

et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\mathrm{d}u$ est convergente.

b. À l'aide des questions précédentes, démontrer que l'on a :

$$f'(x) \underset{0^+}{\sim} -x\ln(x) \quad \text{et} \quad f(x)-\frac{1}{2} \underset{0^+}{\sim} -\frac{x^2\ln(x)}{2}.$$

c. En déduire que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et préciser la valeur de $f'(0)$.

Problème 2 – d'après Ecricome 2014

1. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$.

2. On définit la fonction Γ sur $]0,+\infty[$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

Soit $x > 0$. Déterminer une relation entre $\Gamma(x+1)$, x et $\Gamma(x)$.

3. Justifier que, pour tout $x > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\ln(t)\right)^k \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\mathrm{d}t$ est convergente.

On admet que la fonction Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[,\ \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \left(\ln(t)\right)^k \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\mathrm{d}t.$$

On pose pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

4. Montrer que :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \Psi(x+1) - \Psi(x) = \frac{1}{x}.$$

5. ***a.*** *Lemme : inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ et à valeurs réelles.

En considérant la fonction $\lambda \mapsto \displaystyle\int_a^b (\lambda f + g)^2(t)\mathrm{d}t$, montrer que l'on a :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f(t)^2\mathrm{d}t}\ \sqrt{\int_a^b g(t)^2\mathrm{d}t}.$$

b. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, établir :

$$\forall (x,\mathrm{A}) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \left(\int_0^{\mathrm{A}} \ln(t)\mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_0^{\mathrm{A}} \left(\ln(t)\right)^2 \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{\mathrm{A}} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\mathrm{d}t\right).$$

6. Démontrer que :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \left(\Gamma'(x)\right)^2 \leqslant \Gamma(x)\Gamma''(x)$$

7. En déduire que la fonction Ψ est croissante sur $]0,+\infty[$.

Problème 3 – d'après EML 2017

Question préliminaire

1 ► Soit x un réel. Montrer que l'intégrale ci-dessous est convergente si et seulement si $x > \frac{1}{2}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\,\mathrm{d}t.$$

On considère maintenant la fonction H définie, pour tout réel $x > \frac{1}{2}$, par :

$$\mathrm{H}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\,\mathrm{d}t$$

Dans tout le problème, on note I l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Partie I : premières propriétés de la fonction H

2 ► Calculer H(1).

3 ► Montrer que la fonction H est décroissante sur I.

4 ► Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\mathrm{H}(n) = 2n\left(\mathrm{H}(n) - \mathrm{H}(n+1)\right).$$

5 ► En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $\mathrm{H}(n+1)$ en fonction de $\mathrm{H}(n)$.

6 ► Écrire une fonction Python `H(n)` d'argument un entier strictement positif `n` et qui renvoie la valeur de $\mathrm{H}(n)$.

7 ► Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathrm{H}(n) = \frac{(2n-2)!\,\pi}{2^{2n-1}\left((n-1)!\right)^2}.$$

Partie II : étude de $\mathrm{H}(x)$ lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$

8 ► On considère la fonction :

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right).$$

Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ et réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

9 ► Montrer que pour tout $x \in \mathrm{I}$:

$$\mathrm{H}(x) = \frac{4^x}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}\right)^{2x-1}}\,\mathrm{d}u.$$

Indication : on utilisera pour cela un changement de variable lié à la fonction φ.

10 ► Justifier que pour tout réel $u \geqslant 0$, on a :

$$\mathrm{e}^u \leqslant \mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u} \leqslant 2\mathrm{e}^u.$$

11 ► En déduire que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a :

$$\frac{1}{2x-1} \leqslant \mathrm{H}(x) \leqslant \frac{4^x}{2(2x-1)}.$$

12 ► Déterminer la limite de H en $\frac{1}{2}$ et un équivalent simple de $\mathrm{H}(x)$ quand x tend vers $\frac{1}{2}$.

Partie III : étude de $\mathrm{H}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

13 ► Montrer :

$$\forall u \in [0,1],\ \ln(1+u) \geqslant \frac{1}{2}u.$$

14 ► **On admet que** l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}\,\mathrm{d}y$ converge et vaut $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

Montrer que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}xt^2}\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

15 ► En déduire :

$$\forall x \in \mathrm{I},\ 0 \leqslant \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}xt^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

16 ► Montrer :

$$\forall x \in \mathrm{I},\ 0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2x-1}.$$

17 ► En déduire la limite de H en $+\infty$.

On va maintenant préciser ce résultat en déterminant un équivalent.

18 ► Montrer que l'on a :

$$\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} -\frac{3}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

19 ► On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln(\mathrm{H}(n)) + \dfrac{1}{2}\ln(n)$.

À l'aide du résultat de la question précédente et d'une relation obtenue dans la partie I, déterminer un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

20 ► Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(u_{n+1}-u_n)$ converge.

21 ► En déduire l'existence d'un réel K strictement positif tel que :

$$\mathrm{H}(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{K}}{\sqrt{n}}.$$

22 ► Donner enfin, à l'aide de K, un équivalent simple de $\mathrm{H}(x)$ lorsque le réel x tend vers $+\infty$.