TD 7 – Probabilités discrètes

Exercice 7-1

On dispose d'une pièce qui tombe sur «pile» avec probabilité p. On la lance jusqu'à faire «face» et on note X le nombre de lancers nécessaires. Quelle est la probabilité que ce nombre de lancers soit pair ?

Exercice 7-2

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}$.
La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Une variance ? Mêmes questions pour la variable aléatoire $\sqrt{X}$.

Exercice 7-3

On dispose de n sacs numérotés de 1 à n. Chaque sac contient $n+1$ jetons. Dans le k-ième sac se trouvent k jetons gagnants, les autres étant perdants. Un joueur choisit au hasard un sac et y pioche un jeton.

1. Quelle est la probabilité que le jeton tiré soit gagnant ?

2. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, sachant que le jeton tiré est gagnant, quelle est la probabilité que le tirage ait eu lieu dans le sac numéro k ?

Exercice 7-4

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. La variable aléatoire $Y = \frac{1}{X}$ admet-elle une espérance ?

2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Montrer que $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$ existe et calculer cette espérance.

Exercice 7-5 (Propriétés des variables indicatrices)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Montrer que si A et B sont deux événements, alors :

$$\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A,\ \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B,\ \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B.$$

2. Démontrer que $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.

3. Soit $A_1, \ldots, A_n$ n événements distincts. Interpréter la variable $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}$.

4. *Application*–
Un ascenseur dessert N étages. Au rez-de-chaussée, k personnes montent dans l'ascenseur et choisissent un étage, indépendamment des autres.

a. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, soit A_i l'événement «l'ascenseur s'arrête à l'étage numéro i». Déterminer $\mathbb{P}(A_i)$.

b. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'étages auxquels l'ascenseur s'est arrêté. Exprimer X en fonction des $\mathbb{1}_{A_i}$ et en déduire l'espérance de X.

Exercice 7-6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'espérance)

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant une variance. On souhaite prouver que $\mathbb{E}(XY)^2 \leqslant \mathbb{E}\left(X^2\right)\mathbb{E}\left(Y^2\right)$.

1. Montrer que pour tous réels x et y, on a $|xy| \leqslant \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$.

2. Montrer que $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ et $\mathbb{E}\left(Y^2\right)$ existent, puis que $\mathbb{E}(XY)$ existe.

3. Montrer que pour tout réel t, $\mathbb{E}\left(X^2\right)t^2 + 2t\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}\left(Y^2\right) \geqslant 0$.

4. En distinguant les cas $\mathbb{E}\left(X^2\right) = 0$ et $\mathbb{E}\left(X^2\right) \neq 0$, prouver l'inégalité recherchée.

Exercice 7-7 (Espérance et antirépartition)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance.

1. Pour tout entier k, donner une relation liant $\mathbb{P}(X = k)$, $\mathbb{P}(X > k)$ et $\mathbb{P}(X > k-1)$.

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n)$.

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $n\mathbb{P}(X > n) \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$.

3. En déduire que $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.

Exercice 7-8

Un concierge possède 10 clés sur son trousseau.
Lorsqu'il souhaite ouvrir une porte, il choisit une clé au hasard dans son trousseau jusqu'à obtenir la bonne. Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de clés à essayer par le concierge pour ouvrir une porte.

1. Déterminer la loi de X si le concierge essaie les clés sans remise, puis la loi de X s'il les essaie avec remise.

2. Le concierge essaie les clés sans remise s'il est sobre et avec remise s'il est ivre. Le concierge est ivre un jour sur 3.

a. Montrer que X admet une espérance, et la déterminer.

b. Si le concierge a eu besoin de 6 essais pour ouvrir sa porte, quelle est la probabilité qu'il soit ivre ?

Exercice 7-9

On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un 6, et on note X le nombre de lancers nécessaires. S'il a fallu lancer k fois le dé, on place une boule blanche et k boules noires dans une urne, et on effectue des tirages avec remise jusqu'à obtenir la boule blanche. On note alors Y le nombre de tirages nécessaires.

1. Déterminer la loi de X.

2. Déterminer la loi de Y sachant $(X = k)$.

3. Montrer que Y admet une espérance et la déterminer.

4. Que se passe-t-il si les tirages ont lieu sans remise ?

Exercice 7-10

Une urne contient n boules portant des numéros deux à deux distincts.
Un joueur effectue des tirages sans remise dans cette urne jusqu'à obtenir la boule portant le plus grand numéro. On note X_1 le nombre de tirages nécessaires.
S'il reste des boules dans l'urne, un second joueur effectue lui aussi des tirages sans remise jusqu'à obtenir la boule portant le plus grand numéro parmi celles restant dans l'urne. On note X_2 le nombre de tirages effectués par le second joueur (avec $X_2 = 0$ si le premier joueur a vidé l'urne).

1. Déterminer la loi de X_1.

2. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, déterminer la loi de X_2 sachant que $(X_1 = k)$.

3. Montrer que X_2 admet une espérance et la calculer.

Exercice 7-11

Au casino, un croupier mélange trois cartes : as de cœur, roi de cœur et valet de pique. Il les présente face cachée et un joueur choisit l'une des cartes au hasard. Si c'est un cœur alors il gagne deux euros pour le roi ou un euro pour l'as, et le jeu recommence. Si c'est le valet de pique alors le jeu s'arrête.
On note N le nombre de cartes tirées par le joueur et X la somme qu'il a gagnée à la fin de la partie.

1. Déterminer la loi de N.

2. Déterminer la loi de X sachant que $(N = n)$.

3. Quel prix minimum le casino doit-il faire payer les parties pour que ce jeu soit rentable ?

Problème - d'après Agro-Véto 2011, épreuve B

Pour tout entier naturel n, on note $I_n = [\![0,n]\!]$ et $I_n^* = [\![1,n]\!]$.
Pour une variable aléatoire réelle X à valeurs dans $\mathbb{N}$, on pose, pour tout réel t pour lequel cela a un sens,

$$g_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)\,t^k.$$

La fonction g_X est appelée ***fonction génératrice*** de la variable aléatoire X. Notons que la convention $0^0 = 1$ donne $g_X(0) = P(X=0)$.
On rappelle que si U et V sont deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes et possédant une espérance, alors le produit UV possède une espérance et $\mathbb{E}(UV) = \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V)$.

A. Fonction génératrice d'une variable à valeurs dans I_n

Soient n un entier naturel et X une variable aléatoire réelle à valeurs dans I_n.

A.1. a) Montrer que g_X est une fonction polynôme à coefficients réels dont on précisera le degré maximal. Quelle est la valeur de $g_X(1)$?

b) Montrer que si g_X est donnée, alors la loi de X est entièrement connue.

A.2. Soit $(m_1, m_2) \in \mathbb{N}^2$ et (Z_1, Z_2) deux variables aléatoires réelles à valeurs respectivement dans I_{m_1} et I_{m_2}. On suppose que Z_1 et Z_2 sont indépendantes.

a) En utilisant pour tout réel t l'expression $g_X(t) = E(t^X)$, montrer que

$$g_{Z_1+Z_2}(t) = g_{Z_1}(t)\,g_{Z_2}(t). \qquad (*)$$

b) Calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres n et p avec $p > 0$.

c) Soit Y une variable aléatoire réelle suivant la loi binomiale de paramètres n' et p avec n' un entier naturel. On suppose que X et Y sont indépendantes. Montrer en utilisant A.1.b que $X + Y$ suit la loi binomiale de paramètres $n + n'$ et p.

A.3. *Exemple –*
On lance deux dés classiques à 6 faces. Le résultat affiché par le i-ème dé est une variable aléatoire X_i à valeurs dans $I_6^* = \{1,2,3,4,5,6\}$. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont supposées indépendantes.

a) On suppose les dés équilibrés ; autrement dit que les variables X_1 et X_2 suivent des lois uniformes sur I_6^*. Calculer g_{X_i} pour $i = 1$ et $i = 2$. En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y = X_1 + X_2$.

b) On suppose maintenant que les deux dés ne sont pas équilibrés.
On note pour tout $k \in I_6^*$, $p_k = \mathbb{P}(X_1 = k)$ et $q_k = \mathbb{P}(X_2 = k)$, et on suppose que $p_k > 0$ et $q_k > 0$. On cherche à prouver qu'on ne peut pas trouver des valeurs des p_k et q_k telles que $Y = X_1 + X_2$ soit une variable aléatoire uniforme sur $I' = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. Nous raisonnons par l'absurde : on suppose donc dans la suite de cette question que Y suit la loi uniforme sur I'.

i) Donner la fonction génératrice de Y que l'on notera R.

ii) Montrer que 0 est la seule racine de R.

iii) Déduire de la relation $(*)$ du A.2.a qu'il existe deux polynômes P et Q de degré 5 à coefficients réels tels que pour tout $t \in R$, $t^2\,P(t)Q(t) = R(t)$.

iv) Aboutir à une contradiction quant à l'existence de racines réelles de P et Q. Conclure.

B. Fonction génératrice d'une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$

Soit maintenant X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n = \mathbb{P}(X = n)$.

B.1. Montrer que pour tout $t \in [-1,1]$, la série $\sum a_n t^n$ est absolument convergente. En déduire que g_X est définie sur $[-1,1]$ et donner la valeur de $g_X(1)$.

B.2. Soit Y une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que si X et Y sont indépendantes, alors pour tout $t \in [-1,1]$, $g_{X+Y}(t) = g_X(t)g_Y(t)$.

B.3. a) On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Calculer $g_X(t)$ pour $t \in [-1,1]$ (on pourra poser $q = 1-p$).

b) Même question pour X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Dans la suite du problème, nous admettrons la propriété suivante, généralisant le résultat de A.1.b) : si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors la connaissance de $g_X(t)$ pour tout $t \in [-1,1]$ entraîne la connaissance de la loi de X. Ceci permet donc de reconnaître la loi d'une variable aléatoire dont on connaît la fonction génératrice.

C. Fonction génératrice de la somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires

Dans cette partie,

- $(X_n)_{n\geqslant 1}$ désigne une suite de variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et de même loi,
- N est une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante des variables $(X_n)_{n\geqslant 1}$.

On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.
On définit alors $Y = S_N$ (il s'agit donc de la somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires).
On admet que Y est une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On note f la fonction génératrice commune à toutes les variables $(X_n)_{n\geqslant 1}$, h la fonction génératrice de N, g la fonction génératrice de Y et ψ_n la fonction génératrice de S_n pout tout $n \geqslant 0$. On cherche maintenant à déterminer g en fonction de f et h.
On se limitera ici au cas où N prend ses valeurs dans I_s, s étant un entier naturel supérieur à 1, fixé dans toute cette partie. Soit $t \in [-1,1]$.

C.1. Montrer que, pour tout $n \in I_s$, on a $\psi_n(t) = (f(t))^n$.

C.2. Montrer que, pour tout entier naturel k :

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\Big((Y = k) \cap (N = n)\Big) = \sum_{n=0}^{s} \mathbb{P}\Big((S_n = k) \cap (N = n)\Big).$$

C.3. En déduire l'égalité :

$$g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{s} \mathbb{P}\Big(S_n = k\Big)\mathbb{P}(N = n) \right) t^k.$$

C.4. En déduire que $g(t) = (h \circ f)(t)$.

On admet pour la suite du problème que le résultat obtenu dans la question C.4 est encore valable dans le cas général, c'est-à-dire dans le cas où la variable aléatoire N *est à valeurs dans* $\mathbb{N}$.

C.5. On suppose ici que les $(X_n)_{n\geqslant 1}$ suivent la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et N la loi géométrique de paramètre $p' \in]0,1[$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que Y suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

D. Multiplication d'une bactérie

Une bactérie B est présente dans un milieu M plus ou moins propice à sa reproduction. Elle se reproduit de la façon suivante : chaque individu donne naissance à X nouvelles bactéries B (appelées dans la suite « fils ») puis meurt. On peut donc classer les bactéries par génération : les bactéries d'une génération vont chacune donner naissance à un certain nombre de fils puis disparaître. Les fils de toutes les bactéries de la génération n formeront ainsi la génération $n+1$.
Le but est de déterminer la probabilité que toutes les bactéries B disparaissent du milieu M au bout d'un certain nombre de générations.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on notera dans la suite Y_n le nombre d'individus formant la génération n de bactéries B présentes dans M (on a donc d'après les hypothèses $Y_0 = 1$). On notera de plus $x_n = \mathbb{P}(Y_n = 0)$ (on a donc $x_0 = 0$). On admet que :

1) les variables aléatoires comptant le nombre de « fils » de toutes les bactéries B présentes à une génération n donnée sont des variables indépendantes de même loi. Ces variables sont aussi indépendantes de Y_n.
2) X (nombre de « fils » d'une bactérie B fixée, quelle que soit sa génération) suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et on notera f la fonction génératrice de X (on admet que pour tout $t \in [-1,1]$, $f(t) = e^{\lambda(t-1)}$);
3) la génération $n = 0$ ne compte qu'une seule bactérie B.

D.1. Étudier les variations de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire sa convergence. On admettra dans la suite que la probabilité p que la bactérie B disparaisse du milieu M est $p = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

D.2. Donner la loi de Y_1 et en déduire que $x_1 = f(x_0)$.

D.3. Montrer que $Y_2 = \sum\limits_{k=1}^{Y_1} X_k$ où les variables aléatoires $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant Y_1}$ sont indépendantes et de même loi que X. Déduire du résultat de la question C.4. la fonction génératrice de Y_2 que l'on exprimera en fonction de f.

D.4. a) Pour tout $n \geqslant 1$, donner la fonction génératrice de Y_n et en déduire que

$$x_n = f(x_{n-1}).$$

b) En déduire que $p = f(p)$.

Soit φ la fonction définie sur $[0,1]$ par $\varphi(t) = f(t) - t$.

D.5. On suppose $\lambda \leqslant 1$. Étudier les variations de φ sur $[0,1]$ et en déduire que la bactérie B disparaît du milieu M de façon presque certaine.

D.6. On suppose maintenant que $\lambda > 1$.

a) Étudier les variations de la fonction $\theta : u \mapsto 1 - \dfrac{\ln u}{u}$ sur $]1,+\infty[$.

b) En déduire qu'il existe $\beta \in]0,1[$ tel que $\varphi'(\beta) = 0$. Déterminer les variations de φ sur $[0,1]$.

c) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in]0,1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leqslant \alpha$ et conclure quant à la probabilité de disparition de la bactérie B du milieu M.