

Les questions 1 et 4 ont été vues en cours.

2 ► Étudier la nature de l'intégrale généralisée $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t) e^{-t}}{t} dt$.

► La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t) e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Il y a donc deux problèmes de convergence en 0 et en $+\infty$.

► On a : $\frac{\sin(t) e^{-t}}{t} = \frac{\sin(t)}{t} e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$.

Donc la fonction intégrée est prolongeable par continuité en 0 et il s'agit d'une fausse singularité.

Donc $\int_0^1 \frac{\sin(t) e^{-t}}{t} dt$ converge.

► Pour tout $t \geq 1$, on a :

$$0 \leq \left| \frac{\sin(t) e^{-t}}{t} \right| \leq e^{-t}$$

or $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge donc $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ également.

D'après le critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t) e^{-t}}{t} dt$ converge.

► Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t) e^{-t}}{t} dt$ converge.

3 ► Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \sqrt{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$ (pour $n \geq 1$).

► Pour tout $n \geq 1$, on a : $1 + \frac{1}{n^2} \geq 1$ donc $u_n = \sqrt{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \geq 0$.

► De plus :

$$u_n \sim \sqrt{n} \frac{1}{n^2} \text{ i.e. } u_n \sim \frac{1}{n^{3/2}}.$$

► Enfin, $\frac{3}{2} > 1$ donc la série de terme général $\frac{1}{n^{3/2}}$ converge.

► D'après le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série de terme général u_n converge.