

CHAPITRE

VI

VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ

Sommaire

A	Généralités sur les variables aléatoires à densité	2
A.1	Rappels du cadre général	2
A.2	Notion de variable aléatoire à densité	3
A.3	Densité d'une variable aléatoire réelle	4
A.4	Fonction d'une variable aléatoire	7
B	Moments d'une variable aléatoire à densité	9
B.1	Définition de l'espérance et exemples	9
B.2	Propriétés de l'espérance	12
B.3	Moments et variance	13
C	Lois de variables à densité usuelles	15
C.1	Loi uniforme	15
C.2	Loi exponentielle	17
C.3	Loi normale centrée réduite	20
C.4	Loi normale dans le cas général	23
C.5	Loi γ	25

A - Généralités sur les variables aléatoires à densité

A.1 - Rappels du cadre général

Une *variable aléatoire réelle* sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left\{ \omega \in \Omega ; X(\omega) \leq x \right\} \in \mathcal{A}.$$

Exemple

On lance une fléchette en visant une cible et on note Ω l'ensemble des points d'impact possibles ; au résultat ω du lancer, on fait correspondre la distance $X(\omega)$, en centimètres, entre le point d'impact et le centre de la cible. On a donc une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$ (en fait, on a $X(\Omega) = [0, A]$ si l'on estime que la fléchette arrive au maximum à A cm du centre de la cible).

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On appelle *fonction de répartition* de X , l'application :

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], x \mapsto \mathbb{P}(X \leq x).$$

On a alors les propriétés suivantes :

- ▷ F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
- ▷ $F_X(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ et $F_X(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.
- ▷ F_X est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.
- ▷ Pour tous réels a et b avec $a < b$, on a : $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Exemple

On joueur lance des fléchettes sur une cible circulaire de rayon R et atteint la cible à chaque fois.

On suppose que la probabilité d'atteindre une partie de la cible est proportionnelle à son aire c'est-à-dire que si A est une partie de la cible alors la probabilité que le point d'impact soit dans A est $\frac{\text{aire}(A)}{\pi R^2}$.

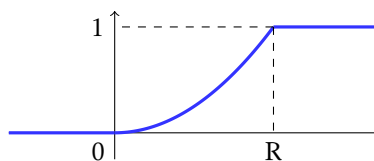
Le joueur envoie une fléchette, on note X la variable aléatoire réelle égale à la distance en cm entre le centre O de la cible et le point d'impact.

Déterminons la fonction de répartition F_X de X .

Tout d'abord, puisque X est une distance, on a $\mathbb{P}(X \leq x) = 0$ pour tout réel négatif x . De plus, on suppose que le joueur atteint toujours la cible donc $\mathbb{P}(X \leq x) = 1$ pour tout réel $x \geq R$. Enfin, dans le cas où $x \in [0, R]$, on a :

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \frac{\pi x^2}{\pi R^2} = \frac{x^2}{R^2}.$$

La représentation graphique de F_X est donc :



Enfin, on appelle **loi** d'une variable aléatoire réelle X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, l'application notée $\mathbb{P}_X$ définie pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ par :

$$\mathbb{P}_X(I) = \mathbb{P}(X \in I).$$

La fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle caractérise la loi de cette variable aléatoire. Autrement dit, **si deux variables aléatoires ont la même fonction de répartition alors elles ont la même loi.**

A.2 - Notion de variable aléatoire à densité

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Définition VI-1

On dit qu'une variable aléatoire réelle X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est une **variable aléatoire (réelle) à densité** lorsque sa fonction de répartition F_X vérifie :

- i. F_X est continue sur $\mathbb{R}$;
- ii. F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

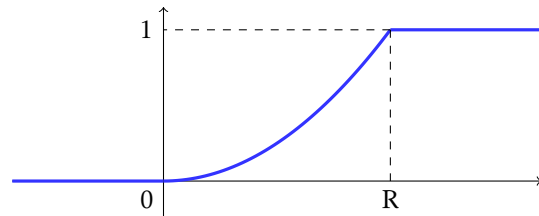
On rappelle que lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$, on appelle *fonction indicatrice* ou *fonction caractéristique* de A , la fonction notée $\mathbb{1}_A$ ou χ_A définie par $\mathbb{1}_A(x) = 1$ pour $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ pour $x \notin A$.

Exemples

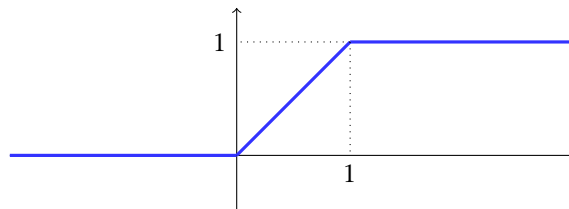
1 ► Dans l'exemple du joueur de fléchettes, on a pour tout réel x :

$$F_X(x) = \frac{x^2}{R^2} \mathbb{1}_{[0,R]}(x) + \mathbb{1}_{]R,+\infty[}(x)$$

donc X est une variable aléatoire réelle à densité.



2 ► Soit X dont la fonction de répartition est représentée ci-dessous :



On a, pour tout réel x :

$$F_X(x) = x \mathbb{1}_{[0,1]}(x) + \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(x)$$

donc X est une variable à densité.

3 ► Une variable aléatoire discrète n'est jamais à densité puisque sa fonction de répartition n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Remarque

On montre qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soit la fonction de répartition de variable à densité est que l'on ait les propriétés suivantes :

- i. F est croissante sur $\mathbb{R}$;
- ii. $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ et $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$;
- iii. F est continue sur $\mathbb{R}$;
- iv. F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

A.3 - Densité d'une variable aléatoire réelle**Définition VI-2**

Soit X une variable aléatoire réelle à densité dont on suppose la fonction de répartition F_X de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$.

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une **densité** de X lorsque :

- i. f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$;
- ii. f est égale à F'_X sur $\mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$.

Remarques

1 ▶ Avec les mêmes notations et hypothèses, la fonction :

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} F'_X(x) & \text{si } x \notin \{x_1, \dots, x_n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une densité de X .

Comme on a également une densité de X en modifiant les valeurs aux points $x_1, \dots, x_n$, on constate que X a donc une infinité de densités.

2 ▶ Si f est une densité de X alors f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Proposition VI-3

Soit X une variable à densité et f_X une densité de X , alors, pour tout réel x , on a :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt.$$

Démonstration

Soit $a_1 < \dots < a_p$ tels que f_X soit continue sur $\mathbb{R}$ sauf, éventuellement, en ces points.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on note n le plus grand indice tel que $a_n \leq x$.

Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $[u, v] \subset]a_k, a_{k+1}[$, on a :

$$\int_u^v f_X(t) dt = F_X(v) - F_X(u),$$

et par continuité de F_X sur $\mathbb{R}$, on obtient la convergence de l'intégrale $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f_X(t) dt$ et :

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f_X(t) dt = F_X(a_{k+1}) - F_X(a_k).$$

De même pour $\int_{-\infty}^{a_1} f_X(t) dt$ et pour $\int_{a_n}^x f_X(t) dt$.

En sommant toutes ces intégrales généralisées, on obtient le résultat annoncé.

Remarques

1 ▶ Pour tout réel x , on a : $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

En effet, on a $\mathbb{P}(X = x) = \bigcap_{n \geq 1} \left(X \in \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right] \right)$ donc le théorème de la limite monotone donne :

$$\mathbb{P}(X = x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(x - \frac{1}{n} < X \leq x + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(F_X\left(x + \frac{1}{n}\right) - F_X\left(x - \frac{1}{n}\right) \right),$$

et la continuité de F_X en x donne le résultat.

2 ▶ On en déduit que l'on a pour tout réel x :

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt,$$

et :

$$\mathbb{P}(X \geq x) = \mathbb{P}(X > x) = \int_x^{+\infty} f_X(t) dt.$$

On a donc pour tous réels a et b :

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f_X(t) dt.$$

Autrement dit, **la densité caractérise la loi**.

3 ▶ On en déduit que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt = 1.$$

4 ▶ Plus généralement, on dit que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une **fonction de densité** ou une **densité de probabilité** lorsque :

- f est positive ;
- f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points ;
- l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et est égale à 1.

Dans ce cas, si X est une v.a. de densité f , alors la fonction de répartition de X est donnée par :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

5 ▶ On admet également que si f est une densité de probabilité alors il existe une variable aléatoire X dont f soit une densité.

Exercice C-81

Montrer que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{\pi(1+t^2)}$ est une densité de probabilité.

Exercice C-82

Montrer que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto e^{-t-e^{-t}}$ est une densité de probabilité.

Exercice C-83

Montrer que l'application f définie ci-dessous est une densité de probabilité :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ te^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Exercice C-84

Déterminer le réel a afin que la fonction suivante soit une densité de probabilité.

$$t \mapsto \frac{a}{\sqrt{t-1}} \mathbb{1}_{[1,2]}(t).$$

Exercice C-85

Déterminer le réel strictement positif a afin que la fonction suivante soit une densité de probabilité.

$$t \mapsto e^{-|t|} \mathbb{1}_{[-a,a]}(t).$$

Exercice C-86

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \frac{\lambda}{e^t + 1} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$.

Déterminer λ afin que f soit une densité de probabilité.

Indication – on pourra commencer par trouver des réels a et b tels que : $\forall x > 0, \frac{1}{x^2+x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$.

Exercice C-87

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \lambda e^{-|t|}$.

1. Déterminer λ afin que f soit une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f . Déterminer la fonction de répartition de X .
3. Soit $Y = 3X - 2$. Établir une relation entre F_X et F_Y .

Est-ce que Y est une variable à densité ?

A.4 - Fonction d'une variable aléatoire

Le cas de l'image $Y = f(X)$ d'une variable aléatoire réelle à densité est plus complexe que le cas d'une variable discrète car Y n'est pas nécessairement à densité. Nous évoquons un cas particulier.

Proposition VI-4

Soit X une variable aléatoire réelle à densité de densité f_X .

Soit a et b deux réels avec $a \neq 0$, alors la variable aléatoire réelle $Y = aX + b$ est à densité et une densité f_Y de Y est définie par :

$$f_Y(t) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

Démonstration

Considérons tout d'abord le cas $a > 0$ alors pour tout réel y on a :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}(aX + b \leq y) \\ &= \mathbb{P}\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right) \\ &= F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \end{aligned}$$

et en dérivant on obtient une densité de X :

$$y \mapsto \frac{1}{a} f\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Dans le cas où $a < 0$, on écrit pour tout réel y :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}(aX + b \leq y) \\ &= \mathbb{P}\left(X \geq \frac{y-b}{a}\right) \\ &= 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \end{aligned}$$

et en dérivant on obtient une densité de X :

$$y \mapsto -\frac{1}{a} f\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Exemples

1 ► Soit X une variable aléatoire réelle à densité avec $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$, que peut-on dire de $Y = \lfloor X \rfloor$?

Tout d'abord, on a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = n) &= \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor = n) \\ &= \mathbb{P}(n \leq X < n+1) \\ &= \int_n^{n+1} f_X(t) dt. \end{aligned}$$

2 ▶ Soit X une variable aléatoire réelle à densité, avec $X(\Omega) = \mathbb{R}$, que peut-on dire de $Y = e^X$?

Si $X(\Omega) = \mathbb{R}$ alors $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel $y > 0$, on a :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(e^X \leq y) \\ &= \mathbb{P}(X \leq \ln(y)) \\ &= F_X(\ln(y)). \end{aligned}$$

Par composition de deux fonctions continues, la fonction F_Y est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'autre part, F_Y est nulle sur $\mathbb{R}_-$ et on a :

$$\left. \begin{array}{l} \ln(y) \xrightarrow{y \rightarrow 0^+} -\infty \\ F_X(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0 \end{array} \right\} \text{ donc } F_X(\ln(y)) \xrightarrow{y \rightarrow 0^+} 0,$$

et il s'ensuit que F_X est continue sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, la fonction F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en $x_1, \dots, x_k$ et la fonction $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et est injective donc n'atteint $x_1, \dots, x_k$ qu'un nombre fini de fois. Il en résulte que, par composition, $F_X \circ \ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. Comme F_Y est nulle sur $\mathbb{R}_-$, on obtient que F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

On en déduit que Y est une variable aléatoire à densité. Une densité de Y est donnée par :

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ \frac{1}{t} f_X(\ln(t)) & \text{si } y > 0 \end{cases},$$

ce qui peut s'écrire :

$$f_Y(t) = \frac{1}{t} f_X(\ln(t)) \mathbb{1}_{]0, +\infty[}.$$

Exercice C-88

Soit X une variable aléatoire réelle à densité.

Les variables aléatoires X^2 , $|X|$ et $X + |X|$ sont-elles à densité ?

Exercice C-89

Soit X une variable aléatoire réelle de densité f nulle hors de $[0, 1]$ et telle que :

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = \frac{1}{\ln(2)} \frac{1}{1+x}.$$

1. Déterminer la fonction de répartition de X .
2. Déterminer la fonction de répartition de $Y = \frac{1}{X}$.
3. Déterminer la fonction de répartition de $Z = \frac{1}{X} - \left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor$ et en déduire que Z et X ont même loi.

B - Moments d'une variable aléatoire à densité

B.1 - Définition de l'espérance et exemples

Définition VI-5

Soit X une variable aléatoire réelle à densité de densité f_X .

On dit que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ lorsque l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt$ est absolument convergente. L'*espérance* de X est alors le réel :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt.$$

Remarques

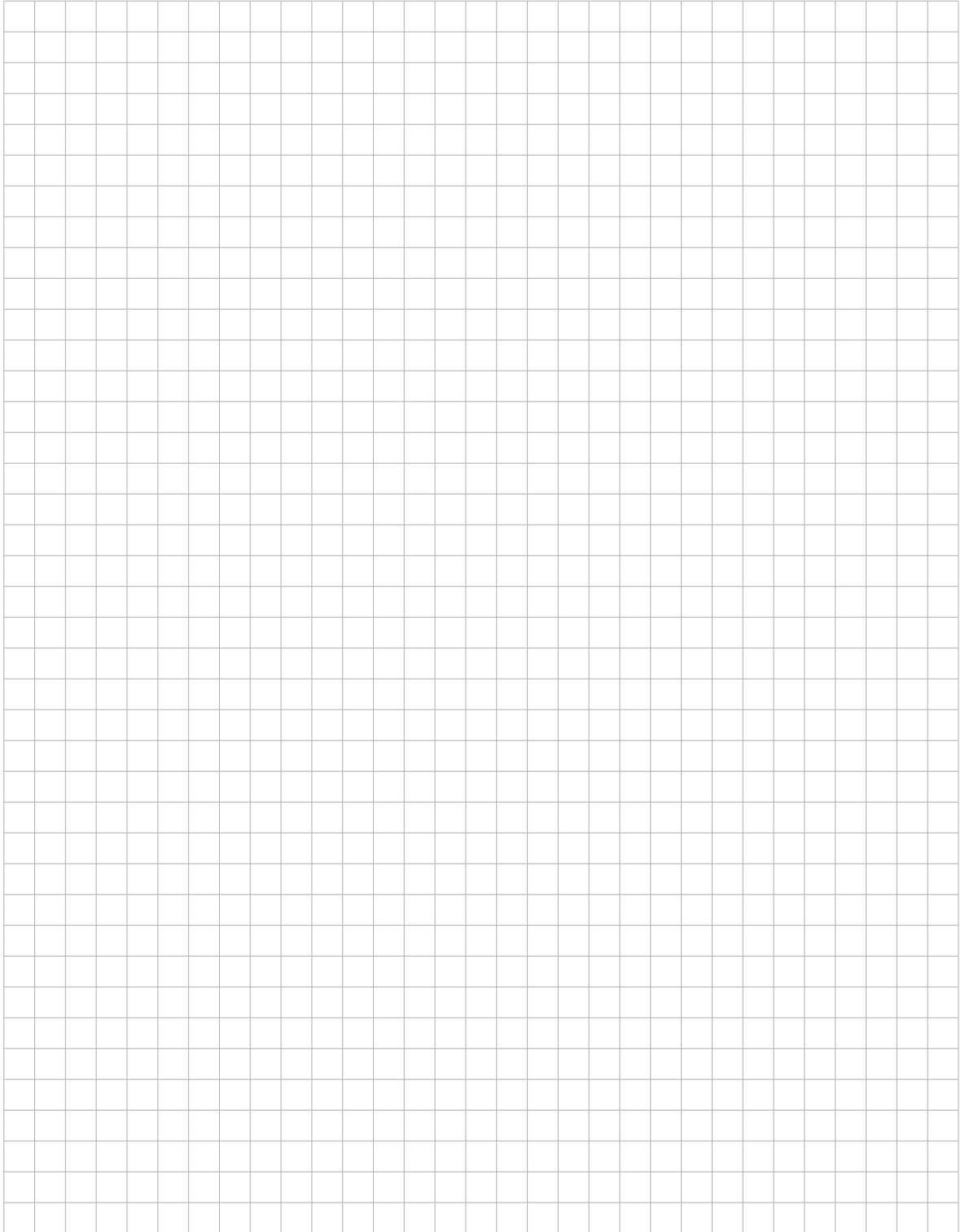
- 1 ▶ L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt$ est impropre en $\pm\infty$ et aux points de discontinuité de f_X .
- 2 ▶ Si X admet une espérance et si f_X est paire alors $\mathbb{E}(X) = 0$.

Exemples

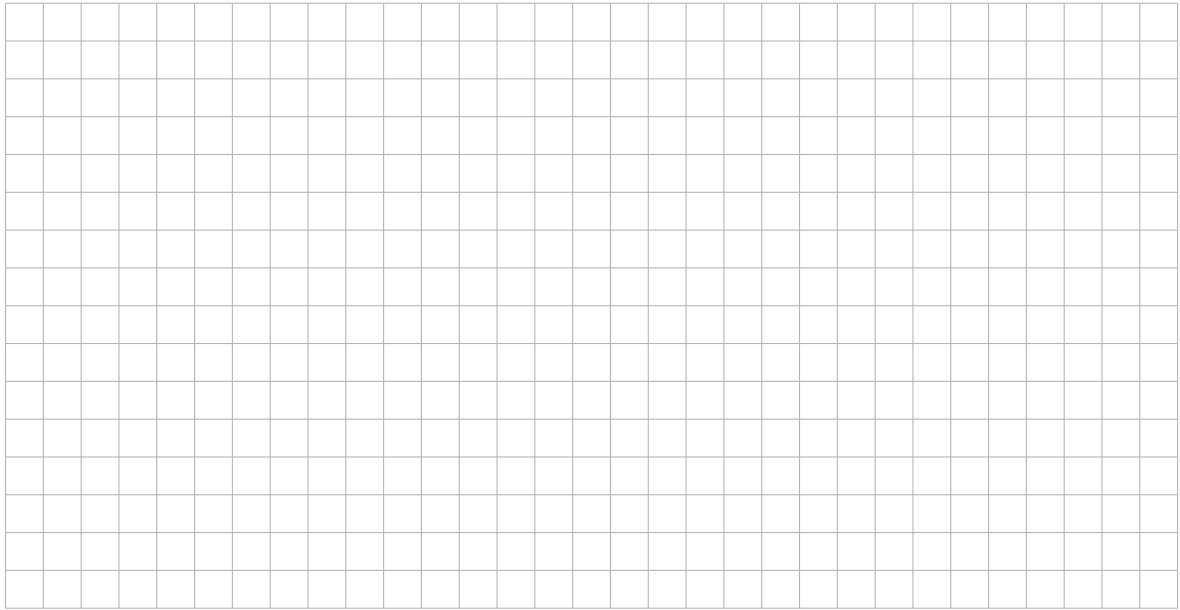
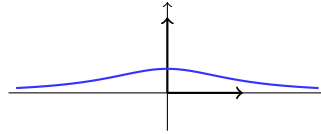
- 1 ▶ Considérons la fonction f donnée par : $f(t) = 6t(1-t)\mathbb{1}_{[0,1]}(t)$.



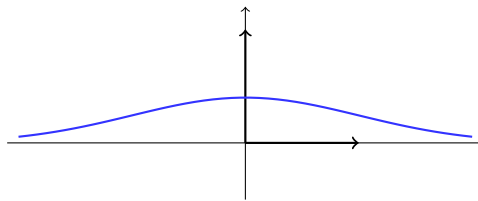
2 ▶ Considérons la fonction f donnée par : $f(t) = \frac{3}{t^4} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t)$.



- 3 ▶ Considérons la densité de probabilité f donnée par : $f(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$.



- 4 ▶ Considérons la fonction f donnée par : $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$.



La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et positive. De plus, on admet que son intégrale sur $\mathbb{R}$ est égale à 1 ce qui signifie que f est une densité de probabilité.

La fonction $t \mapsto |t|f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et paire. De plus $|t|f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|f(t)dt$ converge. Enfin, la fonction $t \mapsto tf(t)$ est impaire sur $\mathbb{R}$ donc son intégrale est nulle.

On en déduit que si X est une variable aléatoire à densité de densité f alors X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = 0$.

Exercice C-90

Soit $a > 0$ et X une variable aléatoire de densité f donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{\alpha} t^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t).$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Calculer $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 1 + \alpha)$ en fonction de α .
3. Pour quelles valeurs de α , X admet-elle une espérance ? La calculer quand elle existe.

B.2 - Propriétés de l'espérance

Proposition VI-6 (linéarité)

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles à densité sur un même espace probabilisé admettant une espérance et a et b deux réels.

Alors $aX + bY$ admet également une espérance et : $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$.

Remarque

On dit qu'une variable aléatoire à densité X est **centrée** lorsqu'elle admet une espérance et que cette espérance est nulle.

Notons que si X admet une espérance alors $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée (c'est la variable centrée associée à X).

Proposition VI-7 (existence par domination)

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles à densité sur un même espace probabilisé.

Si $0 \leq |X| \leq Y$ presque sûrement et si Y admet une espérance alors X admet une espérance et $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(Y)$.

Exemple

↗ Si X est une v.a.r. à densité bornée alors X admet une espérance.

Proposition VI-8 (positivité et croissance)

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles à densité sur un même espace probabilisé, admettant une espérance.

1. Si $X \geq 0$ presque sûrement alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
2. Si $X \leq Y$ presque sûrement alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.

Proposition VI-9 (théorème de transfert)

Soit X une variable aléatoire réelle à densité, de densité f_X nulle en dehors d'un intervalle $]a, b[$ (avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$). Soit $\varphi :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue sauf éventuellement en un nombre fini de points. On a équivalence entre :

- i. $\varphi(X)$ admet une espérance ;
- ii. l'intégrale $\int_a^b \varphi(t) f_X(t) dt$ converge absolument.

En cas de convergence absolue, on a :

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_a^b \varphi(t) f_X(t) dt.$$

Exercice C-91

Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Vérifier que f définit bien une densité puis déterminer l'espérance si elle existe.

Exercice C-92

Soit X une variable aléatoire de densité $f = \mathbb{1}_{]0,1[}$.

Justifier l'existence de l'espérance de $\ln(X)$ et la calculer.

B.3 - Moments et variance

Soit X une variable aléatoire et s un entier naturel, alors X^s est également une variable aléatoire.

On appelle **moment d'ordre s de X** le nombre :

$$m_s(X) = \mathbb{E}(X^s).$$

Dans le cas où X est une variable à densité, de densité f , alors sous réserve de convergence absolue, le théorème de transfert donne :

$$m_s(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^s f(t) dt.$$

On a les propriétés suivantes :

- ◇ si X a un moment d'ordre r alors X a un moment d'ordre s pour tout $s \in \llbracket 0, r \rrbracket$;
- ◇ si X est presque sûrement à valeurs dans un segment $[a, b]$ alors X admet des moments à tous ordres;
- ◇ si X a un moment d'ordre r alors $X - \mathbb{E}(X)$ a également un moment d'ordre r .

Exercice C-93

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -\ln(x) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f . Montrer que X a des moments à tous ordres et les calculer.

Exercice C-94

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Construire une variable à densité admettant un moment d'ordre r mais pas de moment d'ordre $r + 1$.

Définition VI-10

Si X admet un moment d'ordre 2 alors le moment d'ordre 2 de la variable centrée associée est appelé **variance de** X et est noté $\mathbb{V}(X)$ ou $\text{Var}(X)$:

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2).$$

Remarques

1 ▶ Pour tout $x \in X(\Omega)$, on a $(x - \mathbb{E}(X))^2$ donc $\mathbb{V}(X) \geq 0$.

On appelle **écart-type** de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

2 ▶ On a $\mathbb{V}(X) = 0$ si et seulement si X est constante presque sûrement ; dans ce cas, on a $X = \mathbb{E}(X)$ presque sûrement.

3 ▶ Pour tous réels a et b , on a : $\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$ et $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$.

4 ▶ **Formule de Koenig-Huygens** : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

5 ▶ Enfin, précisons un point de vocabulaire. Si X admet un moment d'ordre 2 et n'est pas presque sûrement constante alors :

◊ on dit X est **centrée réduite** lorsque $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{V}(X) = 1$;

◊ la variable aléatoire $X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est appelée la variable aléatoire **centrée réduite** associée à X .

C - Loïs de variables à densité usuelles

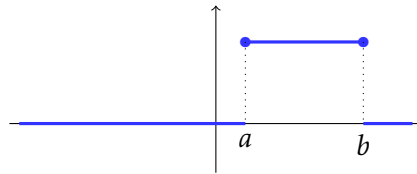
C.1 - Loi uniforme

Définition VI-11

Soit a et b deux réels tels que $a < b$, on dit que X suit la **loi uniforme sur $[a, b]$** lorsque X admet pour densité la fonction :

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(t).$$

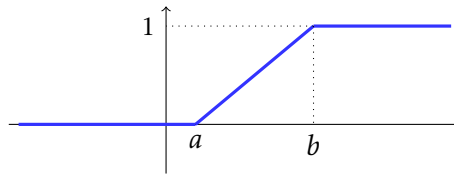
On note alors : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$.



Proposition VI-12

Soit X une v.a.r. de fonction de répartition F , alors X suit $\mathcal{U}([a, b])$ si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{x-a}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x) + \mathbb{1}_{]b,+\infty[}(x).$$



Démonstration

Si X suit la loi $\mathcal{U}([a, b])$ alors pour tout réel x , on peut écrire :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt.$$

Comme f_X est nulle sur $] -\infty, a[$, on a tout d'abord $F(x) = 0$ pour $x < a$.

Si $x \in [a, b]$ alors :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^a f_X(t) dt + \int_a^x f_X(t) dt \\ &= 0 + \frac{1}{b-a} \int_a^x dt \\ &= \frac{x-a}{b-a}. \end{aligned}$$

Enfin, si $x > b$ alors on écrit :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^a f_X(t)dt + \int_a^b f_X(t)dt + \int_b^x f_X(t)dt \\ &= 0 + \frac{1}{b-a} \int_a^b dt + 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Cela correspond bien à l'expression donnée pour F .

Réciproquement, si F est donnée par cette expression alors F est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{a, b\}$ et on a :

$$F'(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a < t < b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On en déduit qu'une densité de X est par exemple la fonction :

$$t \mapsto \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(t)$$

donc X suit la loi $\mathcal{U}([a, b])$.

Proposition VI-13

Soit X une v.a.r. de loi $\mathcal{U}([a, b])$ alors X admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Démonstration



Proposition VI-14

Une v.a.r. X suit $\mathcal{U}([0, 1])$ si et seulement si : $a + (b-a)X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$.

Démonstration**Exercice C-95**

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}([-1, 1])$.

1. Montrer que $|X|$ est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.
2. Montrer que X^2 est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

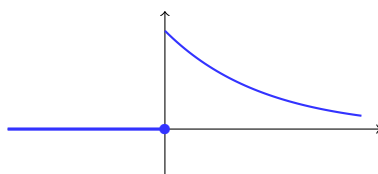
C.2 - Loi exponentielle**Définition VI-15**

Soit λ un réel strictement positif.

On dit que X suit la **loi exponentielle de paramètre** λ lorsque X admet pour densité la fonction :

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(t).$$

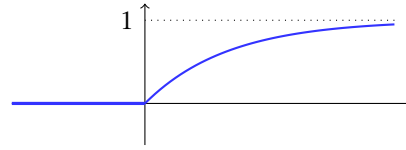
On note alors : $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.



Proposition VI-16

Soit X une v.a.r. de fonction de répartition F , alors X suit $\mathcal{E}(\lambda)$ si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

**Démonstration**

Si X suit $\mathcal{E}(\lambda)$ alors la densité est nulle sur $\mathbb{R}_-$ donc on a $F(x) = 0$ pour tout $x \leq 0$. Pour $x > 0$, on écrit :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \\ &= \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \left[-e^{-\lambda t} \right]_0^x \\ &= 1 - e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

Réciproquement, il suffit de dériver la fonction de répartition F sur $\mathbb{R}^*$.

Remarque

$$\text{Si } X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \text{ alors : } \mathbb{P}(X > x) = \begin{cases} e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Proposition VI-17

Soit X une variable aléatoire réelle, on a : $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \iff \frac{1}{\lambda}X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

Démonstration

Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ alors on a : $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{1}{\lambda}X \leq x\right) &= \mathbb{P}(X \leq \lambda x) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } \lambda x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

donc $\frac{1}{\lambda}X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. La preuve de la réciproque est analogue.

Proposition VI-18

Soit X une v.a.r. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ alors X admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Démonstration

Exercice C-96

Montrer que si X est une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle alors elle vérifie la propriété d'absence de mémoire :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \mathbb{P}(X > x + y) = \mathbb{P}(X > x) \mathbb{P}(X > y).$$

Exercice C-97

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 1 et Y la variable aléatoire qui vaut X si $X > 1$ et 0 sinon. La variable aléatoire Y est-elle une variable à densité ?

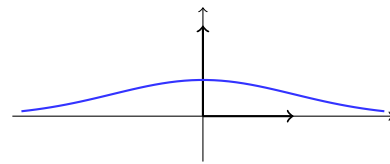
C.3 - Loi normale centrée réduite

Avant tout, on admet la valeur de l'intégrale de Gauss : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$.

Définition VI-19

On dit que X suit la **loi normale centrée réduite (ou loi de Laplace-Gauss)**, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, lorsque X admet pour densité la fonction :

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

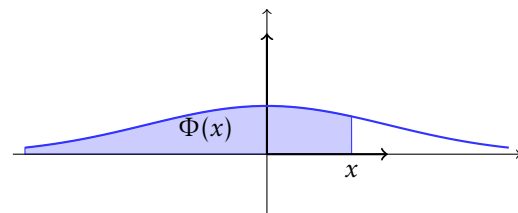
**Proposition VI-20**

Si X suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors sa fonction de répartition Φ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

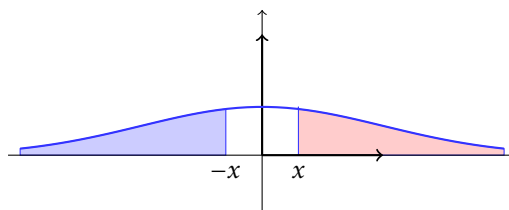
$$\Phi(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

En particulier, on a :

$$\Phi(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$



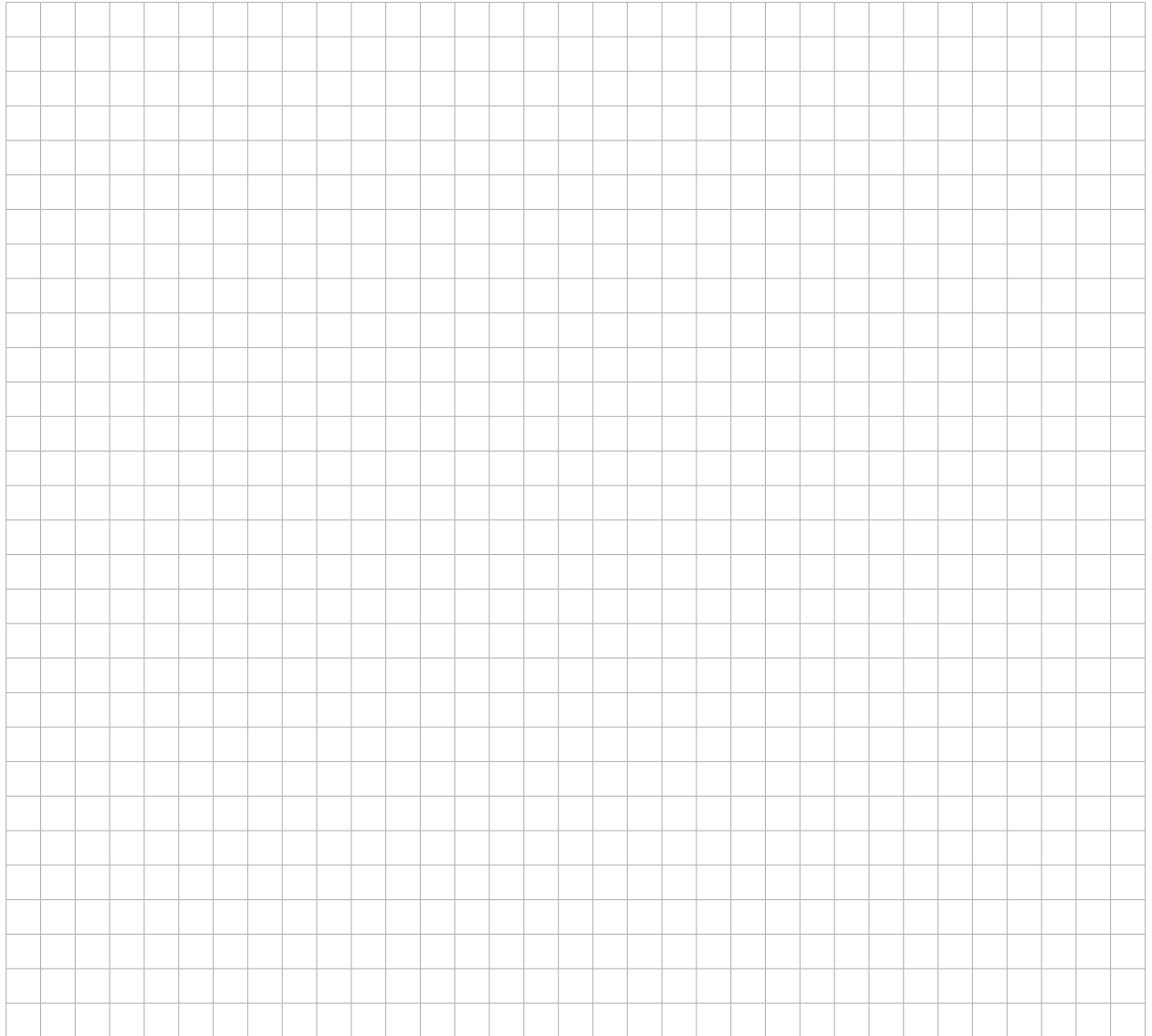
La relation $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ se visualise aisément :



Proposition VI-21

Soit X une v.a.r. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors X admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = 1.$$

Démonstration**Exercice C-98**

Soit X de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Montrer que X^2 est une variable à densité et donner une densité.
2. Est-ce que $X + |X|$ est une variable à densité ?

C.4 - Loi normale dans le cas général

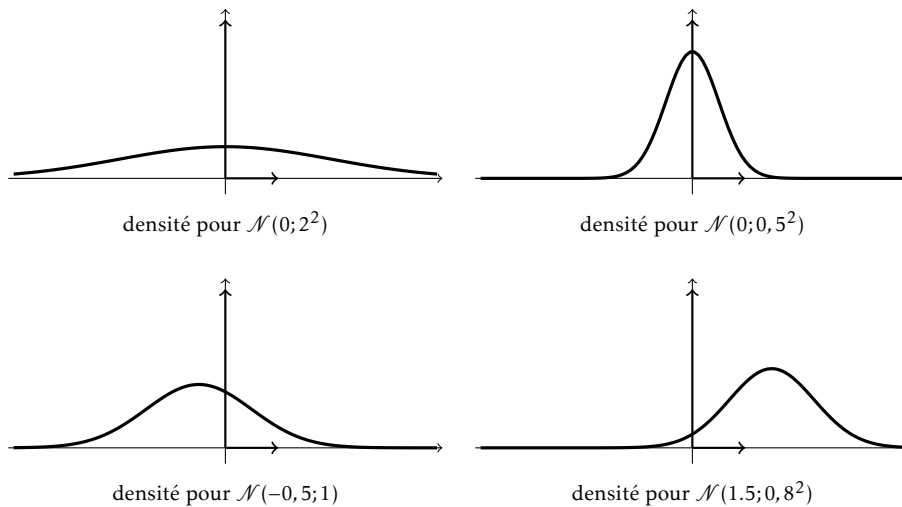
Définition VI-22

Soit μ et σ deux réels tels que $\sigma > 0$.

On dit que X suit la **loi normale de paramètres** (μ, σ^2) lorsque X admet pour densité la fonction :

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

On note alors : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.



Proposition VI-23

Soit X une variable aléatoire réelle : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff \frac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Démonstration

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $Y = \frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}$ admet une densité f_Y donnée par :

$$\begin{aligned} f_Y(t) &= \frac{1}{|1/\sigma|} f_X\left(\frac{t - (-\mu/\sigma)}{1/\sigma}\right) \\ &= \sigma f_X(\sigma t + \mu) \\ &= \sigma \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{((\sigma t + \mu) - \mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}, \end{aligned}$$

donc $\frac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Réciproquement, si $Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ alors $X = \sigma Y + \mu$ admet une densité f_X donnée par :

$$\begin{aligned} f_X(t) &= \frac{1}{|\sigma|} \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \end{aligned}$$

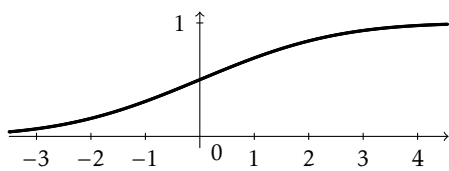
donc $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

En particulier, on en déduit que si X suit $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors sa fonction de répartition F_X est donnée par :

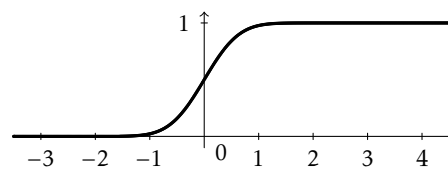
$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

En effet, pour tout réel x , on a :

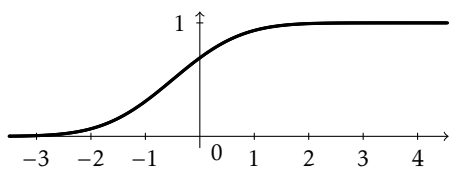
$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$



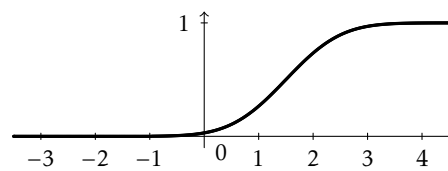
fonction de répartition pour $\mathcal{N}(0; 2^2)$



fonction de répartition pour $\mathcal{N}(0; 0,5^2)$



fonction de répartition pour $\mathcal{N}(-0,5; 1)$



fonction de répartition pour $\mathcal{N}(1,5; 0,8^2)$

Exemple

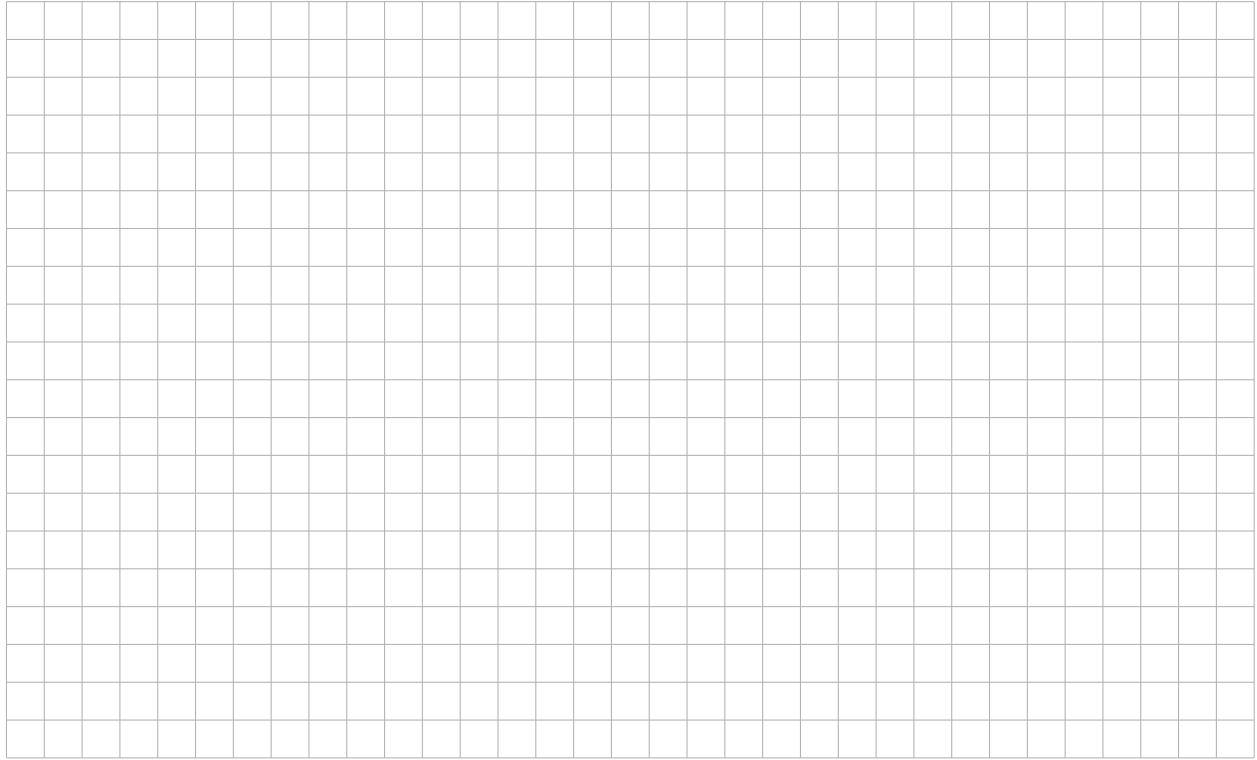
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(1; 0,5^2)$, donner des valeurs approchées de $F_X(1,8)$ et de $F_X(0,7)$.



Proposition VI-24

Soit X une v.a.r. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors X admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = \mu \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \sigma^2.$$

Démonstration**C.5 - Loi γ**

Tout d'abord, on rappelle que la fonction Γ est définie sur $]0, +\infty[$ par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

On a notamment, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

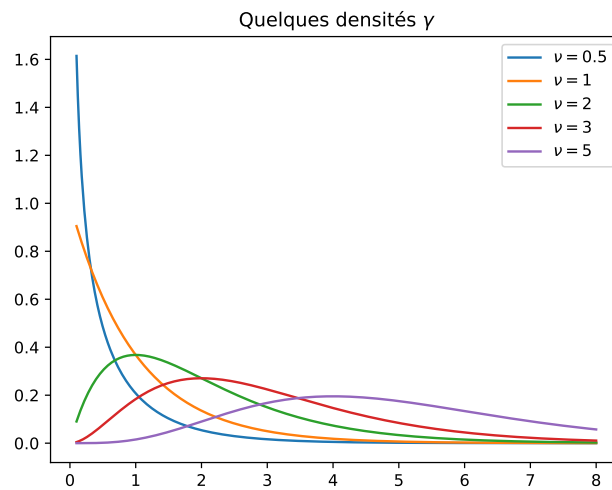
Définition VI-25

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $\nu \in]0, +\infty[$.

On dit que X suit **la loi γ de paramètre ν** , et l'on note $X \hookrightarrow \gamma(\nu)$, lorsque X admet pour densité la fonction f_ν donnée par :

$$f_\nu(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1} e^{-t} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Notons que la loi $\gamma(1)$ est exactement la loi $\mathcal{E}(1)$.



Proposition VI-26

Soit X une v.a.r. de loi $\gamma(\nu)$ alors X admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = \nu \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \nu.$$

Démonstration

