Exercice 1 – d'après EML 2015

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_k[x]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$ formé des polynômes de degré au plus k. On définit l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}_4[x]\ ;\ P(0) = P(4) = 0\}$ et le polynôme $W(x) = x(x-4)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_4[x]$.

2. Montrer que E est de dimension 3 et en déterminer une base.

3. Montrer que, pour tout $Q \in \mathbb{R}_2[x]$, on a $WQ \in E$.

4. Montrer que l'application $\phi : \mathbb{R}_2[x] \to E,\ Q \mapsto WQ$ est un isomorphisme.

5. Pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[x]$, on considère le polynôme :

$$\Delta(Q)(x) = Q(x+1) - Q(x).$$

Par exemple, si $Q(x) = x^2 - 3x + 5$, alors :

$$\Delta(Q)(x) = \Big((x+1)^2 - 3(x+1) + 5\Big) - (x^2 - 3x + 5).$$

a. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.

b. Déterminer pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[x]$ le degré du polynôme $\Delta(Q)$ en fonction de celui de Q.

c. Déterminer la matrice A de Δ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$.

d. Déterminer le noyau et l'image de Δ.

e. Établir : $\Delta \circ \Delta \circ \Delta = 0$.

6. On définit l'endomorphisme f de E suivant : $f = \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}$, où ϕ^{-1} est l'application réciproque de ϕ.

a. Montrer que $f \circ f \circ f = 0$.

b. Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f.

c. Démontrer que f admet une valeur propre et une seule et la déterminer.

d. Est-ce que f est diagonalisable ?

Éléments de correction —

1. On a $E \subset \mathbb{R}_4[x]$ et le polynôme nul est dans E donc E est non vide.
Soit $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\lambda P + Q)(0) = \lambda P(0) + Q(0) = 0$$

$$\text{et}\quad (\lambda P + Q)(4) = \lambda P(4) + Q(4) = 0$$

donc $\lambda P + Q \in E$.
Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[x]$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_4[x]$:

$$\begin{aligned} P \in E &\iff P(0) = P(4) = 0 \\ &\iff x(x-4) \text{ divise } P(x) \end{aligned}$$

et puisque $\deg(P) \leqslant 4$, cela signifie :

$$\begin{aligned} P \in E &\iff \exists Q \in \mathbb{R}_2[x] \ /\ P(x) = x(x-4)Q(x) \\ &\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ /\ P(x) = x(x-4)(ax^2 + bx + c) \\ &\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ /\ P(x) = ax^3(x-4) + bx^2(x-4) + cx(x-4). \end{aligned}$$

Cela signifie que :

$$E = \mathrm{Vect}\Big(x \mapsto x^3(x-4), x \mapsto x^2(x-4), x \mapsto x(x-4)\Big).$$

Ces trois polynômes sont de degrés échelonnés donc forment une famille libre or ils engendrent E donc $\Big(x \mapsto x^3(x-4), x \mapsto x^2(x-4), x \mapsto x(x-4)\Big)$ est une base de E et $\dim(E) = 3$.

3. Si $Q \in \mathbb{R}_2[x]$ alors $WQ \in \mathbb{R}_4[x]$ et $WQ(x)$ est divisible par x et $x - 4$ donc admet 0 et 4 pour racines. Donc $\boxed{WQ \in E.}$

4. Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_2[x])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \phi(\lambda P + Q) &= W(\lambda P + Q) \\ &= \lambda WP + WQ \\ &= \lambda \phi(P) + \phi(Q) \end{aligned}$$

donc $\boxed{\phi \text{ est linéaire.}}$

Soit $P \in \ker\phi$ alors $\phi(P)$ est nul *i.e.* WP est nul ce qui signifie que P est nul. Donc ϕ est injective.

Puisque $\dim(\mathbb{R}_2[x]) = \dim(E)$, on en déduit que $\boxed{\phi \text{ est bijective.}}$

5. ***a.*** Soit $(P,Q) \in (\mathbb{R}_2[x])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P + Q)(x) &= (\lambda P + Q)(x+1) - (\lambda P + Q)(x)\\ &= \lambda P(x+1) + Q(x+1) - \lambda P(x) - Q(x)\\ &= \lambda\Big(P(x+1) - P(x)\Big) + \Big(Q(x+1) - Q(x)\Big)\\ &= \lambda\Delta(P)(x) + \Delta(Q)(x)\\ &= \Big(\lambda\Delta(P) + \Delta(Q)\Big)(x)\end{aligned}$$

donc Δ est linéaire.

Posons $Q(x) = ax^2 + bx + c$ alors :

$$\begin{aligned}\Delta(Q)(x) &= \Big(a(x+1)^2 + b(x+1) + c\Big) - \Big(ax^2 + bx + c\Big)\\ &= \Big(ax^2 + 2ax + a + bx + b + c\Big) - \Big(ax^2 + bx + c\Big)\\ &= 2ax + a + b\end{aligned}$$

donc $\deg\Delta(Q) \leqslant 2$.

Donc $\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[x].}$

b. D'après le calcul précédent, si Q est de degré 2 (*i.e.* $a \neq 0$) alors $\Delta(Q)$ est de degré 1.

Si Q est de degré 1 (*i.e.* $a = 0$ et $b \neq 0$) alors $\Delta(Q)$ est constant non nul donc de degré 0.

Si Q est constant alors $\Delta(Q)$ est nul donc de degré $-\infty$.

c. Les calculs précédents montrent que :

$$\Delta(1)(x) = 0,\ \Delta(X)(x) = 1 \text{ et } \Delta(X^2)(x) = 2x + 1,$$

donc la matrice A de Δ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ est : $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

d. La matrice précédente est de rang 2 donc (en utilisant la formule du rang) :

$$\dim(\operatorname{Im}\Delta) = 2 \text{ et } \dim(\ker\Delta) = 1.$$

On en déduit que $\boxed{\ker(\Delta) = \operatorname{Vect}(x \mapsto 1)}$ (*i.e.* l'ensemble des polynômes constants).

D'autre part, $\operatorname{Im}(\Delta) = \operatorname{Vect}(x \mapsto 1, x \mapsto 2x+1)$ *i.e.* $\boxed{\operatorname{Im}(\Delta) = \operatorname{Vect}(x \mapsto 1, x \mapsto x).}$

e. On a :

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

donc $\boxed{\Delta \circ \Delta \circ \Delta = 0.}$

6. ***a.*** On a :

$$\Big(\phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}\Big)\Big(\phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}\Big)\Big(\phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}\Big) = \phi \circ \Delta^3 \circ \phi^{-1} = 0$$

donc $\boxed{f \circ f \circ f = 0}$.

b. Soit $P \in E$, alors puisque ϕ est bijective :

$$\begin{aligned}P \in \ker(f) &\iff \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}(P) = 0\\ &\iff \Delta \circ \phi^{-1}(P) \in \ker\phi\\ &\iff \Delta \circ \phi^{-1}(P) = 0\\ &\iff \phi^{-1}(P) \in \ker(\Delta)\\ &\iff \exists\lambda \in \mathbb{R} \,/\, \phi^{-1}(P) = \lambda\\ &\iff \exists\lambda \in \mathbb{R} \,/\, P = \phi(\lambda)\\ &\iff \exists\lambda \in \mathbb{R} \,/\, P = \lambda W\end{aligned}$$

donc $\ker(f) = \operatorname{Vect}(W)$ or W est non nul donc $\ker(f)$ est de dimension 1.

La formule du rang donne $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$.

On notant $X : x \mapsto x$ et $X^2 : x \mapsto x^2$, une base de E est (X, XW, X^2W) donc :

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(f(W), f(XW), f(X^2W)) = \operatorname{Vect}(f(XW), f(X^2W))$$

or :

$$f(XW) = \phi\Big(\Delta\Big(\phi^{-1}(XW)\Big)\Big) = \phi\Big(\Delta(X)\Big) = \phi(1) = W$$

et :

$$f(X^2W) = \phi\Big(\Delta\Big(\phi^{-1}(X^2W)\Big)\Big) = \phi\Big(\Delta(X^2)\Big) = \phi(2X+1) = (2X+1)W$$

donc :

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(W, (2X+1)W) = \operatorname{Vect}(W, 2XW)$$

or $\operatorname{Im}(f)$ est de dimension 2 donc $\boxed{(W, 2XW) \text{ est une base de } \operatorname{Im}(f).}$

c. Puisque X^3 est un polynôme annulateur de f, la seule valeur propre possible de f est 0.

Par ailleurs, d'après la question précédente et le théorème du rang, le noyau de f est de dimension 1 donc 0 est une valeur propre de f.

Donc $\boxed{f \text{ admet 0 pour unique valeur propre.}}$

d. Le seul sous-espace propre de f est $\ker(f)$ qui est de dimension 1 alors que E est de dimension 3.

Donc $\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

Exercice 2

Partie I

Dans cette partie, x désigne un réel de $[0,1[$.

1. ***a.*** Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} dt \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}$.

b. En déduire que : $\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$.

2. ***a.*** Pour tout réel t de $[0,1[$ et pour tout k élément de $\mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}$.

b. En déduire que : $\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt$.

c. Utiliser la question **1** pour montrer que la série de terme général $\frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et exprimer $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

d. Conclure que : $\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt$.

On admet sans démonstration que l'on a aussi : $\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2} dt$.

Partie II

Un joueur réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce. Cette pièce donne pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier pile.
Si N prend la valeur n, le joueur place n boules numérotées de 1 à n dans une urne, puis il extrait une boule au hasard de cette urne. On dit que le joueur a gagné si le numéro porté par la boule tirée est impair et on désigne par A l'événement : « le joueur gagne ». On appelle X la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule extraite de l'urne.

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ modélisant cette expérience.

3. Reconnaître la loi de N.

4. ***a.*** Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à j, la valeur de $\mathbb{P}_{(\mathrm{N}=2j)}(\mathrm{X} = 2k+1)$.

b. Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à $j+1$, la valeur de $\mathbb{P}_{(\mathrm{N}=2j+1)}(\mathrm{X} = 2k+1)$.

c. Déterminer $\mathbb{P}_{(\mathrm{N}=2j)}(\mathrm{X} = 2k+1)$ lorsque k appartient à $[\![0, j-1]\!]$.

d. Déterminer $\mathbb{P}_{(\mathrm{N}=2j+1)}(\mathrm{X} = 2k+1)$ lorsque k appartient à $[\![0, j]\!]$.

5. ***a.*** Justifier que $\mathbb{P}(\mathrm{X} = 2k+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{N} = n)\mathbb{P}_{(\mathrm{N}=n)}(\mathrm{X} = 2k+1)$.

b. En admettant que l'on puisse scinder la somme précédente selon la parité de n, montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(\mathrm{X} = 2k+1) = \frac{p}{q}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1}\right)$$

c. En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\mathrm{X} = 2k+1) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t} dt$.

6. ***a.*** Montrer que : $\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

b. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X} = 2k+1) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} \mathrm{d}t - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} \mathrm{d}t\right)$$

c. En déduire que : $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} \mathrm{d}t$.

7. ***a.*** Trouver trois constantes réelles a, b et c telles que, pour tout t différent de 1 et de -1, on ait :

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2}$$

b. Écrire $\mathbb{P}(\mathrm{A})$ explicitement en fonction de q.

c. En déduire que $\mathbb{P}(\mathrm{A}) > \frac{1}{2}$.

Éléments de correction —

1. ***a.*** Pour tout $t \in [0;x]$, on a $t^2 \leqslant x^2$, donc $1-t^2 \geqslant 1-x^2$. Or, on a également $1-x^2>0$ (car $0<x<1$, qui implique $x^2<1$). Donc $1-t^2 \geqslant 1-x^2>0$. Par conséquent, on peut passer à l'inverse et on obtient : $0<\dfrac{1}{1-t^2} \leqslant \dfrac{1}{1-x^2}$, ce qui donne, en multipliant par t^m (qui est positif ou nul) : $0 \leqslant \dfrac{t^m}{1-t^2} \leqslant \dfrac{t^m}{1-x^2}$.
On intègre cet encadrement sur l'intervalle $[0;x]$:

$$\int_0^x 0dt \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-x^2}dt$$

C'est-à-dire :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \leqslant \frac{1}{1-x^2}\int_0^x t^m dt$$

Or, $\displaystyle\int_0^x t^m dt = \left[\frac{t^{m+1}}{m+1}\right]_0^x = \frac{x^{m+1}}{m+1}$. On en déduit :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \leqslant \frac{1}{1-x^2}\times\frac{x^{m+1}}{m+1}$$

Et donc, comme $x \leqslant 1$:

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \leqslant \frac{1}{1-x^2}\times\frac{1}{m+1}}$$

b. On a sans difficulté : $\dfrac{1}{1-x^2}\times\dfrac{1}{m+1} \underset{m}{\longrightarrow} +\infty 0$. On en déduit, par encadrement :

$$\boxed{\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \underset{m}{\longrightarrow} +\infty 0}$$

2. ***a.*** Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a $t^{2j}=(t^2)^j$. On reconnaît donc la somme des k premiers termes d'une suite géométrique de raison t^2, avec $t^2 \neq 1$. D'où :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j} = \frac{1-(t^2)^k}{1-t^2} = \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}}$$

b. On intègre l'égalité ci-dessus sur l'intervalle $[0;x]$:

$$\int_0^x \sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}dt = \int_0^x \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}dt$$

C'est-à-dire, par linéarité de l'intégrale :

$$\sum_{j=0}^{k-1}\int_0^x t^{2j}dt = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt$$

Or, $\displaystyle\int_0^x t^{2j}dt = \left[\frac{t^{2j+1}}{2j+1}\right]_0^x = \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$. Donc finalement :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k-1}\frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt}$$

c. D'après la question 1.(b) : $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt \underset{k}{\longrightarrow} +\infty 0$. Par conséquent :

$$\sum_{j=0}^{k-1}\frac{x^{2j+1}}{2j+1} \underset{k}{\longrightarrow} +\infty \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt$$

Conclusion : la série de terme général $\dfrac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et on a :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt}$$

d. Soit $k \in \mathbb{N}$ quelconque. Alors :

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \sum_{j=0}^{k-1}\frac{x^{2j+1}}{2j+1} + \sum_{j=k}^{+\infty}\frac{x^{2j+1}}{2j+1}$$

C'est-à-dire, d'après les questions 2.(b) et 2.(c) :

$$\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt + \sum_{j=k}^{+\infty}\frac{x^{2j+1}}{2j+1}$$

Les $\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt$ se simplifient de chaque côté, et on en déduit :

$$\boxed{\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt}$$

3. La variable aléatoire N représente le temps d'attente du premier succès (obtenir pile) à une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes (les lancers de pièce), chacune ayant une probabilité de succès égale à p.

Par conséquent, $\boxed{\text{N suit une loi géométrique de paramètre } p}$.

4. *a.* Si $k \geqslant j$, alors $2k+1 > 2j$. Il est donc impossible de tirer une boule numérotée $2k+1$ dans une urne qui ne contient que des boules numérotées de 1 à $2j$. Par conséquent : $\boxed{P_{(N=2j)}(X = 2k+1) = 0 \text{ si } k \geqslant j}$.

b. De même, si $k \geqslant j+1$, alors $k > j$ et donc $2k+1 > 2j+1$. Par conséquent, il est impossible de tirer une boule numérotée $2k+1$ dans une urne qui ne contient que des boules numérotées de 1 à $2j+1$. On en déduit que $\boxed{P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1) = 0 \text{ si } k \geqslant j+1}$.

c. Si k appartient à $[\![0; j-1]\!]$, alors $1 \leqslant 2k+1 \leqslant 2j-1$ et donc, en particulier : $1 \leqslant 2k+1 \leqslant 2j$. De plus, une fois l'urne remplie avec les boules numérotées de 1 à $2j$, chaque boule a la même probabilité d'être tirée. Par conséquent :
$\boxed{P_{(N=2j)}(X = 2k+1) = \frac{1}{2j} \text{ si } k \leqslant j-1}$.

d. De même, si k appartient à $[\![0; j]\!]$, alors $1 \leqslant 2k+1 \leqslant 2j+1$. En remplissant l'urne avec des boules numérotées de 1 à $2j+1$, la boule numérotée $2k+1$ peut donc être tirée. Et comme il y a équiprobabilité :
$\boxed{P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1) = \frac{1}{2j+1} \text{ si } k \leqslant j}$.

5. *a.* Comme N suit une loi géométrique, on a $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Donc $\left([N = n]\right)_{n\geqslant 1}$ est un système complet d'événements. Par conséquent, d'après la formule des probabilités totales, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{P(X = 2k+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n)P_{(N=n)}(X = 2k+1)}$$

Maintenant, on sépare la somme en deux (comme indiqué dans l'énoncé) entre, d'un côté les n pairs (qui s'écrivent sous la forme $2j$) et d'un autre côté les termes impairs (qui s'écrivent sous la forme $2j+1$) :

$$\begin{aligned}P(X = 2k+1) &= \sum_{j=1}^{+\infty} P(N = 2j)P_{(N=2j)}(X = 2k+1)\\ &\quad + \sum_{j=1}^{+\infty} P(N = 2j+1)P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1)\end{aligned}$$

On remplace $P(N = 2j)$ et $P(N = 2j+1)$ en se servant de la loi de N :

$$\begin{aligned}P(X = 2k+1) &= \sum_{j=1}^{+\infty} pq^{2j-1}P_{(N=2j)}(X = 2k+1)\\ &\quad + \sum_{j=1}^{+\infty} pq^{2j}P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1)\\ &= \frac{p}{q}\sum_{j=1}^{+\infty} q^{2j}P_{(N=2j)}(X = 2k+1)\\ &\quad + \frac{p}{q}\sum_{j=1}^{+\infty} q^{2j+1}P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1)\end{aligned}$$

Enfin, on remplace $P_{(N=2j)}(X = 2k+1)$ et $P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1)$ en se servant de la question 3 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{X}=2k+1) &= \frac{p}{q}\sum_{j=k+1}^{+\infty} q^{2j}\mathrm{P}_{(\mathrm{N}=2j)}(\mathrm{X}=2k+1)\\
&\quad+\frac{p}{q}\sum_{j=k}^{+\infty} q^{2j+1}\mathrm{P}_{(\mathrm{N}=2j+1)}(\mathrm{X}=2k+1) \quad \text{(questions 3.a et 3.b)}\\
&= \frac{p}{q}\sum_{j=k+1}^{+\infty} q^{2j}\frac{1}{2j}\\
&\quad+\frac{p}{q}\sum_{j=k}^{+\infty} q^{2j+1}\frac{1}{2j+1} \quad \text{(questions 3.c et 3.d)}
\end{aligned}$$

D'où, en mettant $\frac{p}{q}$ en facteur :

$$\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{X}=2k+1)=\frac{p}{q}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty}\frac{q^{2j}}{2j}+\sum_{j=k}^{+\infty}\frac{q^{2j+1}}{2j+1}\right)}$$

b. D'après la question I.2.d et la partie admise juste après, on a (en remplaçant dans l'égalité ci-dessus) :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=2k+1)=\frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}dt+\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt\right)$$

(on peut bien remplacer x par q car q appartient à $[0;1[$).
On simplifie :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{X}=2k+1) &= \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}dt+\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt\right)\\
&= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k+1}+t^{2k}}{1-t^2}dt \quad \text{(linéarité de l'intégrale)}\\
&= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}(t+1)}{(1-t)(1+t)}dt
\end{aligned}$$

Ce qui donne bien (en simplifiant par $t+1$) :

$$\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{X}=2k+1)=\frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}dt}$$

6. ***a.*** Pour tout $t\in[0;q]$, on a $t\leqslant q<1$, donc $1-t\geqslant 1-q>0$, et donc, en prenant l'inverse :

$$0<\frac{1}{1-t}\leqslant\frac{1}{1-q}$$

D'où, en multipliant par $\frac{t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)}$ (qui est positif ou nul car $t\geqslant 0$, $1-t\geqslant 0$ et $1+t\geqslant 0$) :

$$0\leqslant\frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}\leqslant\frac{1}{1-q}\times\frac{t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)}$$

On intègre cet encadrement sur l'intervalle $[0;q]$:

$$0\leqslant\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\leqslant\frac{1}{1-q}\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)}dt$$

Or, on sait que $\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)}dt \underset{n}{\rightarrow} +\infty 0$ (question I.1.b). On en déduit, par encadrement :

$$\boxed{\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt \underset{n}{\rightarrow} +\infty 0}$$

b. On fait la somme en se servant du résultat de la question 4.(b) :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}(\mathrm{X}=2k+1) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}dt\right)\\
&= \frac{p}{q}\int_0^q\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{t^{2k}}{1-t}\right)dt \quad \text{(linéarité de l'intégrale)}\\
&= \frac{p}{q}\int_0^q\left(\frac{1}{1-t}\sum_{k=0}^{n}t^{2k}\right)dt
\end{aligned}$$

On reconnaît (à l'intérieur de l'intégrale) la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison t^2 (avec $t^2 \neq 1$). Donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X}=2k+1) &= \frac{p}{q}\int_0^q \left(\frac{1}{1-t}\times\frac{1-(t^2)^{n+1}}{1-t^2}\right)dt\\ &= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1-t^{2n+2}}{(1-t)(1-t^2)}dt\\ &= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1-t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\end{aligned}$$

Ce qui donne bien, par linéarité de l'intégrale :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X}=2k+1) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\right)}$$

c. L'événement A est l'événement « X est impair ». On a donc $\mathrm{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n est l'événement « X est impair et $\mathrm{X} \leqslant 2n+1$ ». De plus, $(\mathrm{A}_n)_{n\geqslant 1}$ est une famille croissante d'événements. Par conséquent : $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$ n'est autre que $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X}=2k+1)$, c'est-à-dire, d'après la question précédente :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_n) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\right)$$

On a donc :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\right)$$

C'est-à-dire, d'après la question 5.(a) :

$$\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt}$$

7. ***a.*** Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{a}{1-t}+\frac{b}{1+t}+\frac{c}{(1-t)^2} &= \frac{a(1-t)(1+t)+b(1-t)^2+c(1+t)}{(1-t)^2(1+t)}\\ &= \frac{a(1-t^2)+b(1-2t+t^2)+c(1+t)}{(1-t)^2(1+t)}\\ &= \frac{(-a+b)t^2+(-2b+c)t+(a+b+c)}{(1-t)^2(1+t)}\end{aligned}$$

Par identification des coefficients, ceci est égal à $\dfrac{1}{(1-t)^2(1+t)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ si $\begin{cases} -a+b &= 0\\ -2b+c &= 0\\ a+b+c &= 1\end{cases}$. On résout ce système :

$$\begin{cases} -a+b &= 0\\ -2b+c &= 0\\ a+b+c &= 1\end{cases} \iff \begin{cases} a &= b\\ c &= 2b\\ a+b+c &= 1\end{cases} \iff \begin{cases} a &= b\\ c &= 2b\\ 4b &= 1\end{cases} \iff \begin{cases} a &= 1/4\\ c &= 1/2\\ b &= 1/4\end{cases}$$

> Conclusion : pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, on a :
>
> $$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t}+\frac{b}{1+t}+\frac{c}{(1-t)^2}$$
>
> avec $a=\dfrac{1}{4}$, $b=\dfrac{1}{4}$ et $c=\dfrac{1}{2}$.

b. On reprend le résultat de la question 5.(c) et on calcule l'intégrale en se servant de la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P(A)} &= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt \\
&= \frac{p}{q}\left(\frac{1}{4}\int_0^q \frac{1}{1-t}dt + \frac{1}{4}\int_0^q \frac{1}{1+t}dt + \frac{1}{2}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2}dt\right) \\
&= \frac{p}{q}\left(\frac{1}{4}\Big[-\ln(1-t)\Big]_0^q + \frac{1}{4}\Big[\ln(1+t)\Big]_0^q + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-t}\right]_0^q\right) \\
&= \frac{p}{q}\left(\frac{-1}{4}\ln(1-q) + \frac{1}{4}\ln(1+q) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-q}-1\right)\right) \\
&= \frac{1-q}{q}\left(\frac{-1}{4}\ln(1-q) + \frac{1}{4}\ln(1+q) + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{1-q}\right)\right) \\
&= \frac{1-q}{q}\left(\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{1-q}\right)\right)
\end{aligned}$$

Ce qui donne, en développant :

$$\boxed{\mathrm{P(A)} = \frac{1-q}{4q}\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) + \frac{1}{2}}$$

c. On a $0 < 1-q < 1+q$ (car $q \in\,]0;1[$). On en déduit que $\dfrac{1+q}{1-q} > 1$, et donc $\ln\left(\dfrac{1+q}{1-q}\right) > 0$. De plus, $\dfrac{1-q}{4q} > 0$ car $1-q > 0$ et $4q > 0$. Donc $\dfrac{1-q}{4q}\ln\left(\dfrac{1+q}{1-q}\right) > 0$.

On en déduit, avec l'expression obtenue à la question précédente :

$$\boxed{\mathrm{P(A)} > \frac{1}{2}}$$

Exercice 3

Dans tout le problème, on note E l'ensemble des fonctions $u : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}^+$ et vérifiant :

$$\exists\, p \in \mathbb{N} \,/\, \frac{u(t)}{t^p} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

On remarquera que l'entier p dépend *a priori* de la fonction u considérée.

Partie 1 – Définition de la transformée de Laplace

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2. Soit u un élément de E. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$: $t^2\, u(t)\mathrm{e}^{-xt} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

3. En déduire que pour tout $x \in]0,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Dans toute la suite du problème, pour toute fonction u de E, on définit la fonction $\mathrm{L}(u)$ sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[\ ,\ \mathrm{L}(u)(x) = \int_0^{+\infty} u(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

4. Montrer que : $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall (u,v) \in \mathrm{E}^2,\ \mathrm{L}(\alpha u + v) = \alpha\,\mathrm{L}(u) + \mathrm{L}(v)$.

Partie 2 – Quelques exemples

5. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé. On considère pour tout i dans $\{0,1,2\}$ la fonction $v_i :\ \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^+,\ v_i(t) = t^i\, \mathrm{e}^{-at}\ .$$

Pour tout i dans $\{0,1,2\}$, montrer que v_i appartient à E.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On considère la fonction $w_n :\ \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^+,\ w_n(t) = t^n.$$

a. Montrer que la fonction w_n appartient à E.

b. Montrer pour tout x de $]0,+\infty[$ que $\mathrm{L}(w_n)(x) = \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

Partie 3 – Propriétés des transformées de Laplace

7. Limite de $\mathrm{L}(u)$ en $+\infty$:
Soit $u \in$ E. Justifier qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^+$ et $\mathrm{M} \in \mathbb{R}^+$ tels que :

$$\forall\, t \in [\mathrm{A},+\infty[\ ,\ |u(t)| \leqslant t^p \quad et \quad \forall\, t \in [0,\mathrm{A}]\ ,\ |u(t)| \leqslant \mathrm{M}\ .$$

En déduire : $\mathrm{L}(u)(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

8. Limite de $\mathrm{L}(u)$ en 0 :
Soit u un élément de E tel que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(s)\,\mathrm{d}s$ converge.

On note, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathrm{R}(t) = \displaystyle\int_t^{+\infty} u(s)\,\mathrm{d}s$.

a. Déterminer la limite en $+\infty$ de R. Montrer que R appartient à E.

b. Montrer que R est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et que : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \mathrm{R}'(t) = -u(t)$.

c. En déduire : $\forall x \in]0,+\infty[, \mathrm{L}(u)(x) = \mathrm{R}(0) - x\,\mathrm{L}(\mathrm{R})(x)$.

d. Soit $\varepsilon \in]0,+\infty[$. Justifier qu'il existe $\mathrm{B} \in [0,+\infty[$ tel que : $\forall t \in [\mathrm{B},+\infty[\ ,\ |\mathrm{R}(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

En déduire : $\forall\, x \in]0,+\infty[\ ,\ |\mathrm{L}(u)(x) - \mathrm{R}(0)| \leqslant x \displaystyle\int_0^{\mathrm{B}} |\mathrm{R}(t)|\,\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2}$.

e. Montrer que : $\mathrm{L}(u)(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)\mathrm{d}t$.

9. Transformée de Laplace d'une dérivée :
Soit $u : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ telle que $u' \in$ E.

a. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{A} \in [0,+\infty[$ tels que : $\forall t \in [\mathrm{A},+\infty[, |u(t)| \leqslant |u(\mathrm{A})| + \dfrac{t^{p+1}}{p+1}$.

b. En déduire que u appartient à E.

c. Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \mathrm{L}(u')(x) = -u(0) + x\,\mathrm{L}(u)(x)$.

10. Dérivée d'une transformée de Laplace.
Soit u un élément de E. On considère, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^+\ , u_n(t) = t^n\, u(t).$$

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n appartient à E.

b. Montrer : $\forall a \in \mathbb{R},\ |\mathrm{e}^a - 1 - a| \leqslant \frac{a^2}{2}\,\mathrm{e}^{|a|}$.

c. Soit $x \in]0,+\infty[$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tels que : $|h| \leqslant \frac{x}{2}$.
Montrer que :

$$\forall t \in [0,+\infty[, \quad \left| \frac{\mathrm{e}^{-(x+h)t} - \mathrm{e}^{-xt}}{h} + t\,\mathrm{e}^{-xt} \right| \leqslant |h| \, \frac{t^2}{2} \exp(-xt/2).$$

En déduire :

$$\left| \frac{\mathrm{L}(u)(x+h) - \mathrm{L}(u)(x)}{h} + \mathrm{L}(u_1)(x) \right| \leqslant \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 \, |u(t)| \exp(-xt/2) \, \mathrm{d}t.$$

d. Montrer que $\mathrm{L}(u)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et exprimer $(\mathrm{L}(u))'$ en fonction de $\mathrm{L}(u_1)$.

Éléments de correction —

1. Soient $u, v \in \mathrm{E}$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Par définition de E, il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{t^p} = \lim_{t\to+\infty} \frac{v(t)}{t^q} = 0.$$

Soit alors $r = p + q \in \mathbb{N}$. On a alors

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\lambda u + v}{t^r} = \lim_{t\to+\infty} \lambda \frac{1}{t^q} \frac{u(t)}{t^p} + \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^p} \frac{v(t)}{t^q} = 0.$$

De plus, $\lambda u + v$ est continue, donc $\lambda u + v \in \mathrm{E}$.
Enfin, E contient la fonction nulle (pour laquelle on peut prendre par exemple $p = 0$), et donc est non vide.
$\boxed{\text{Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions continues sur } \mathbb{R}^+.}$

2. Soit $u \in \mathrm{E}$, et soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{t^p} = 0$. Alors

$$t^2 u(t) e^{-xt} = t^{p+2} e^{-xt} \frac{u(t)}{t^p}.$$

Par croissance comparée, $t^{p+2} e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et par hypothèse $\frac{u(t)}{t^p} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} t^2 u(t) e^{-xt} = 0.}$$

3. On en déduit que $u(t)e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} u(t)e^{-xt} dt$.
Enfin, $t \mapsto u(t)e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, de sorte qu'il n'y a pas de problème de convergence en 0. Ainsi

$$\boxed{\int_0^{+\infty} u(t)e^{-xt} dt \text{ converge.}}$$

4. Soient $u, v \in \mathrm{E}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$\mathrm{L}(\alpha u + v) = \int_0^{+\infty} (\alpha u(t) + v(t)) e^{-xt} dt = \alpha \int_0^{+\infty} u(t) e^{-xt} dt + \int_0^{+\infty} v(t) e^{-xt} dt = \boxed{\alpha \mathrm{L}(u) + \mathrm{L}(v).}$$

5. Pour tout $i \in \{0,1,2\}$, v_i est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} v_i(t) = 0$ par croissance comparée. Donc on a bien $v_i \in \mathrm{E}$ (et on peut prendre $p = 0$).
Soit alors $x > 0$ et soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $a + x > 0$. Alors une densité de X est $f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ (a+x)e^{-(a+x)t} & \text{si } x > 0 \end{cases}$
et nous savons que

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = 1, \int_0^{+\infty} t f(t) dt = \mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{1}{a+x}, \int_0^{+\infty} t^2 f(t) dt = \mathrm{E}(\mathrm{X}^2) = \mathrm{V}(\mathrm{X}) + \mathrm{E}(\mathrm{X})^2 = \frac{2}{(a+x)^2}.$$

Ainsi, il vient

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}(v_0)(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x+a} \int_0^{+\infty} f(t) dt = \boxed{\frac{1}{a+x}} \\
\mathrm{L}(v_1)(x) &= \int_0^{+\infty} t e^{-xt} dt = \frac{1}{x+a} \int_0^{+\infty} t f(t) dt = \boxed{\frac{1}{(a+x)^2}} \\
\mathrm{L}(v_2)(x) &= \int_0^{+\infty} t^2 e^{-xt} dt = \frac{1}{x+a} \int_0^{+\infty} t^2 f(t) dt = \boxed{\frac{2}{(a+x)^3}}
\end{aligned}$$

6. *a.* La fonction w_n est continue car polynomiale, et $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{w_n(t)}{t^{n+1}} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t} = 0$.
Ainsi, $\boxed{w_n \in \mathrm{E}.}$

b. On a alors
$$\mathrm{L}(w_n)(x)=\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt}dt.$$
L'application $t\mapsto xt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ sur lui-même, de sorte que nous pouvons procéder au changement de variable $u=xt$. On a alors
$$\mathrm{L}(w_n)(x)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{x}\right)^n e^{-u}\frac{du}{x}=\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^{+\infty}u^n e^{-t}dt=\frac{\Gamma(n+1)}{x^{n+1}}=\boxed{\frac{n!}{x^{n+1}}.}$$

7. Limite de L(u) en $+\infty$

Par définition de E, il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{u(t)}{t^p}=0$.
Rappelons que par définition d'une limite, cela signifie que
$$\forall\varepsilon>0,\exists \mathrm{A}>0: t\geq \mathrm{A}\Rightarrow\left|\frac{u(t)}{t^p}\right|\leq\varepsilon.$$
En particulier, si $\varepsilon=1$, alors il existe $\mathrm{A}>0$ tel que
$$\forall t\in[\mathrm{A};+\infty[,\left|\frac{u(t)}{t^p}\right|\leq 1\Leftrightarrow\forall t\in[\mathrm{A};+\infty[,|u(t)|\leq|t^p|=t^p.$$
La fonction u étant continue sur le segment $[0,\mathrm{A}]$, elle y est bornée, et donc il existe $\mathrm{M}\geq 0$ tel que
$$\boxed{\forall t\in[0,\mathrm{A}],|u(t)|\leq \mathrm{M}.}$$
Ainsi, si $t\in[0,\mathrm{A}],|u(t)|\leq\mathrm{M}\leq\mathrm{M}+t^p$ et si $t\geq\mathrm{A},|u(t)|\leq t^p\leq\mathrm{M}+t^p$. Alors
$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R}_+,|u(t)|\leq\mathrm{M}+t^p.}$$
On en déduit que
$$\forall x>0,|\mathrm{L}(u)(x)|=\left|\int_0^{+\infty}u(t)e^{-xt}dt\right|\leq\int_0^{+\infty}|u(t)|dt\leq\int_0^{+\infty}\mathrm{M}e^{-xt}dt+\int_0^{+\infty}t^pe^{-xt}dt.$$
Mais d'après la question 5, on a
$$\mathrm{M}\int_0^{+\infty}e^{-xt}dt=\frac{1}{x}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$$
et de même
$$\int_0^{+\infty}t^pe^{-xt}dt=\frac{p!}{x^{p+1}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$
Et donc par le théorème des gendarmes,
$$\lim_{x\to+\infty}|\mathrm{L}(u)(x)|=0\Rightarrow\boxed{\lim_{x\to+\infty}\mathrm{L}(u)(x)=0.}$$

8. Limite de L(u) en 0

a. $\mathrm{R}(t)$ est le reste d'une intégrale convergente, c'est alors du cours que $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{R}(t)=0.}$
De plus, pour $x\geq 0$, on a
$$\mathrm{R}(x)=\int_x^{+\infty}u(t)dt=\int_0^{+\infty}u(t)dt-\int_0^x u(t)dt.$$
Or, $\displaystyle\int_0^{+\infty}u(t)dt$ est une constante, et la fonction $x\mapsto\int_0^x u(t)dt$ est continue d'après le théorème fondamental de l'analyse. Par conséquent R est continue sur $\mathbb{R}^+$.
Puisqu'elle est de limite nulle en $+\infty$, $\boxed{\text{elle est dans E}}$ (on peut prendre par exemple $p=0$).

b. La fonction $x\mapsto\int_0^x u(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée égale à u. Et donc d'après le calcul effectué à la question précédente, R est de classe $\mathcal{C}^1$ et
$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R}^+,\mathrm{R}'(t)=-u(t).}$$

c. Soit $x>0$, et soit $\mathrm{A}>0$. Posons $v(t)=e^{-xt}$ et $w(t)=-\mathrm{R}(t)$. Alors v et w sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et nous pouvons procédons à une intégration par parties sur le segment $[0,\mathrm{A}]$:
$$\int_0^{\mathrm{A}}u(t)e^{-xt}dt=\left[-\mathrm{R}(t)e^{-xt}\right]_0^{\mathrm{A}}-\int_0^{\mathrm{A}}xe^{-xt}\mathrm{R}(t)dt=\mathrm{R}(0)-\mathrm{R}(\mathrm{A})e^{-x\mathrm{A}}-x\int_0^{\mathrm{A}}\mathrm{R}(t)e^{-xt}dt.$$
En passant à la limite lorsque $\mathrm{A}\to+\infty$, il vient
$$\mathrm{L}(u)(x)=\int_0^{+\infty}u(t)e^{-xt}dt=\mathrm{R}(0)-x\int_0^{+\infty}\mathrm{R}(t)e^{-xt}dt=\boxed{\mathrm{R}(0)-x\mathrm{L}(\mathrm{R})(x).}$$

d. Comme à la question 6, il s'agit de la définition de $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{R}(t) = 0$: il existe $\mathrm{B} > 0$ tel que

$$\boxed{\forall t \in [\mathrm{B}, +\infty[, |\mathrm{R}(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\forall x > 0, |\mathrm{L}(u)(x) - \mathrm{R}(0)| &= |x\mathrm{L}(\mathrm{R})(x)| \\ &\leq x \int_0^{+\infty} |\mathrm{R}(t)e^{-xt}|dt \\ &\leq x\left(\int_0^{\mathrm{B}} |\mathrm{R}(t)|e^{-xt}dt + \int_{\mathrm{B}}^{+\infty} |\mathrm{R}(t)|e^{-xt}dt\right).\end{aligned}$$

Or, pour tout $t \in [0, \mathrm{B}]$, on a $0 \leq e^{-xt} \leq 1$, de sorte que $\int_0^{\mathrm{B}} |\mathrm{R}(t)|e^{-xt}dt \leq \int_0^{\mathrm{B}} |\mathrm{R}(t)|dt$.
Et pour $t \geq \mathrm{B}, |\mathrm{R}(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et donc

$$\int_{\mathrm{B}}^{+\infty} |\mathrm{R}(t)|e^{-xt}dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathrm{B}}^{+\infty} e^{-xt}dt.$$

Mais pour $\mathrm{A} > \mathrm{B}$, on a

$$\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} e^{-xt}dt = \left[-\frac{e^{-xt}}{x}\right]_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} = \frac{e^{-x\mathrm{B}}}{x} - \frac{e^{-x\mathrm{A}}}{x} \underset{\mathrm{A}\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e^{-x\mathrm{B}}}{x}.$$

On en déduit que

$$|\mathrm{L}(u)(x) - \mathrm{R}(0)| \leq x \int_0^{\mathrm{B}} |\mathrm{R}(t)|dt + x\frac{\varepsilon}{2}\frac{e^{-xb}}{x} \leq \boxed{x \int_0^{\mathrm{B}} |\mathrm{R}(t)|dt + \frac{\varepsilon}{2}.}$$

e. Soit $\varepsilon > 0$ fixé et soit B comme dans la question précédente (notons qu'un tel B dépend de ε). Alors pour $0 \leq x < \frac{\varepsilon}{2\int_0^{\mathrm{B}} |\mathrm{R}(t)|dt}$, on a

$$|\mathrm{L}(u)(x) - \mathrm{R}(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2\int_0^{\mathrm{B}} |\mathrm{R}(t)|dt} \int_0^{\mathrm{B}} |\mathrm{R}(t)|dt + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mathrm{A} \left(= \frac{\varepsilon}{2\int_0^{\mathrm{B}} |\mathrm{R}(t)|dt}\right)$ tel que pour $0 \leq x < \mathrm{A}, |\mathrm{L}(u)(x) - \mathrm{R}(0)| \leq \varepsilon$.
Nous reconnaissons là la définition de

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \mathrm{L}(u)(x) = \mathrm{R}(0) = \int_0^{+\infty} u(t)dt.}$$

9. Transformée de Laplace d'une dérivée

a. Soient, comme à la question 6, $\mathrm{A} > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que pour $x \geq \mathrm{A}$, $|u'(x)| \leq x^p$.
Alors pour $t \geq \mathrm{A}$, on a $u(t) = u(\mathrm{A}) + \int_{\mathrm{A}}^{t} u'(x)dx$. On en déduit que

$$\begin{aligned}|u(t)| &= \left|u(\mathrm{A}) + \int_{\mathrm{A}}^{t} u'(x)dx\right| \\ &\leq |u(\mathrm{A})| + \left|\int_{\mathrm{A}}^{t} u'(x)dx\right| \\ &\leq |u(\mathrm{A})| + \int_{\mathrm{A}}^{t} x^p dx \\ &\leq |u(\mathrm{A})| + \frac{1}{p+1}\left(t^{p+1} - \mathrm{A}^{p+1}\right) \\ &\leq \boxed{|u(\mathrm{A})| + \frac{t^{p+1}}{p+1}.}\end{aligned}$$

b. En conservant les notations de la question précédente, pour $t \geq \mathrm{A}$, on a

$$\left|\frac{u(t)}{t^{p+2}}\right| \leq \frac{|u(\mathrm{A})|}{t^{p+2}} + \frac{1}{p+1}\frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, la fonction u est continue par hypothèse, donc $\boxed{u \text{ appartient à E.}}$

c. Soit $\mathrm{A} > 0$. Procédons alors à une intégration par parties sur le segment $[0, \mathrm{A}]$:

$$\int_0^{\mathrm{A}} u'(t)e^{-xt}dt = \left[u(t)e^{-xt}\right]_0^{\mathrm{A}} + x\int_0^{\mathrm{A}} u(t)e^{-xt}dt = u(\mathrm{A})e^{-x\mathrm{A}} - u(0) + x\int_0^{\mathrm{A}} u(t)e^{-xt}dt.$$

En faisant tendre A vers $+\infty$ dans les deux membres de l'égalité précédente, il vient

$$\boxed{\mathrm{L}(u')(x) = \int_0^{+\infty} u'(t)e^{-xt}dt = -u(0) + x\int_0^{+\infty} u(t)e^{-xt}dt = -u(0) + x\mathrm{L}(u)(x).}$$

10. Dérivée puis dérivée n-ième d'une transformée de Laplace

a. Puisque $u \in \mathrm{E}$, il existe un entier p tel que $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{u(t)}{t^p} = 0$.

Mais alors $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{u_n(t)}{t^{n+p}} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{u(t)}{t^p} = 0$.
Comme de plus u est continue, il en est de même de u_n comme produit de fonctions continues.
Et donc $\boxed{u_n \in \mathrm{E}}$.

b. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 à la fonction $f : x \mapsto e^x$.
• Si $a \geq 0$, alors sur le segment $[0,a]$, f'' est majorée par e^a et donc

$$|e^a - 1 - a| = |f(a) - f(0) - af'(0)| \leq \frac{a^2}{2}e^a = \frac{a^2}{2}e^{|a|}.$$

• Si $a < 0$, alors sur le segment $[a,0]$, f'' est majorée par $1 \leq e^{|a|}$, de sorte que

$$|e^a - 1 - a| = |f(a) - f(0) - af'(0)| \leq \frac{a^2}{2}e^{|a|}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, |e^a - 1 - a| \leq \frac{a^2}{2}e^{|a|}.}$$

c. Pour $t > 0$, appliquons l'inégalité précédente à $a = -th$. Alors il vient

$$\forall t > 0, |e^{-th} - 1 + th| \leq \frac{t^2h^2}{2}e^{th}.$$

En multipliant cette inégalité par $e^{-xt} > 0$, il vient

$$\forall t > 0, |e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + the^{-xt}| \leq \frac{t^2h^2}{2}e^{(h-x)t} \leq \frac{t^2h^2}{2}e^{-xt/2}.$$

Enfin, en divisant par $|h|$, on obtient

$$\forall t > 0 \left|\frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} + te^{-xt}\right| \leq \frac{h^2}{|h|}\frac{t^2}{2}e^{-xt/2} = |h|\frac{t^2}{2}e^{-x/2}.$$

Multiplions cette inégalité par $|u(t)|$, de sorte que

$$\forall t > 0, \left|\frac{u(t)e^{-(x+h)t} - u(t)e^{-xt}}{h} + tu(t)e^{-xt}\right| \leq |h|\frac{t^2}{2}|u(t)|e^{-xt/2}.$$

Par croissance de l'intégrale, il vient alors

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\mathrm{L}(u)(x+h) - \mathrm{L}(u)(x)}{h} + \mathrm{L}(u_1)(x)\right| &= \left|\int_0^{+\infty}\left(\frac{u(t)e^{-(x+h)t} - u(t)e^{-xt}}{h} + tu(t)e^{-xt}\right)dt\right| \\
&\leq \int_0^{+\infty}\left|\frac{u(t)e^{-(x+h)t} - u(t)e^{-xt}}{h} + tu(t)e^{-xt}\right|dt \\
&\leq \int_0^{+\infty} |h|\frac{t^2}{2}|u(t)|e^{-xt/2}dt \\
&\leq \boxed{\frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} t^2|u(t)|e^{-xt/2}dt.}
\end{aligned}$$

d. Soit $x \in \mathbb{R}^+$ fixé. Alors lorsque $h \to 0$, on a

$$\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} t^2|u(t)|e^{-xt/2}dt = 0.$$

Et donc d'après le lemme des gendarmes,

$$\frac{\mathrm{L}(u)(x+h) - \mathrm{L}(u)(x)}{h} + \mathrm{L}(u_1)(x) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{L}(u)(x+h) - \mathrm{L}(u)(x)}{h} = -\mathrm{L}(u_1)(x).$$

Ceci signifie que L est dérivable en x et que

$$\mathrm{L}'(u)(x) = -\mathrm{L}(u_1)(x).$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $\boxed{\mathrm{L}(u) \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$ et que $\boxed{\mathrm{L}(u)' = -\mathrm{L}(u_1).}$