

Notions abordées et objectifs

- Généralités sur les probabilités.
 - Révisions du programme de première année; notamment le formalisme, les formules des probabilités totales et des probabilités composées, le théorème de la limite monotone (*i.e.* le théorème de continuité croissante/décroissante).
 - Notion de variable aléatoire, loi d'une variable aléatoire, fonction de répartition.
- Variables aléatoires discrètes.
 - Révision du programme de première année; notamment les lois usuelles (finies, géométrique et de Poisson), espérance, variance.
 - Notion de loi conditionnelle, espérance conditionnelle, formule de l'espérance totale.

► Note aux colleurs :

- La notion de couple de variables aléatoires n'a pas été revue; les n -uplets de variables aléatoires seront vus plus tard.

► Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :

1. On lance un dé équilibré à 6 faces (en supposant les lancers indépendants) tant que l'on n'obtient pas le chiffre 6. On suppose qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ permettant de modéliser cette expérience.
Montrons que l'expérience s'arrête presque sûrement (c'est-à-dire que l'on finit par obtenir 6 presque sûrement).
2. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et telle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \lambda k.$$

- a. Calculer λ puis $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(X = k)$ et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \mathbb{P}(X = k)$.
- b. Déterminer l'espérance de $Y = X + \frac{1}{X}$.

3. Le nombre de clients qui entrent dans un restaurant un soir de semaine est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ . Chaque client choisit, indépendamment du choix de ses voisins, de la viande avec probabilité p et du poisson avec la probabilité $1 - p$. On note Y le nombre de clients qui choisissent de la viande.

Déterminer la loi de Y .

4. Le nombre de clients qui entrent dans un restaurant un soir de semaine est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ . Chaque client choisit, indépendamment du choix de ses voisins, de la viande avec probabilité p et du poisson avec la probabilité $1 - p$. On note Y le nombre de clients qui choisissent de la viande.

Justifier que Y admet une espérance et calculer la (sans déterminer la loi de Y).

5. *Inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'espérance*

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant une variance. Montrer que :

$$\mathbb{E}(XY)^2 \leq \mathbb{E}(X^2) \mathbb{E}(Y^2).$$

6. *Espérance et antirépartition*

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance.

- a. Pour tout entier k , donner une relation liant $\mathbb{P}(X = k)$, $\mathbb{P}(X > k)$ et $\mathbb{P}(X > k - 1)$.

$$\text{En déduire que pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n).$$

- b. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $n\mathbb{P}(X > n) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$.

- c. En déduire que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.

7. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- a. Interpréter l'événement $B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$.

- b. Montrer que si la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge alors B est négligeable.