

Notions abordées et objectifs

- ▶ Variables aléatoires à densité.
 - Définition, fonction de répartition.
 - Notion de densité de probabilité.
- ▶ Moments d'une variable à densité.
 - Espérance, propriétés, théorème de transfert.
 - Moments, variance.
- ▶ Lois usuelles.
 - Loi uniforme, loi exponentielle, loi normale, loi γ .

► Note aux colleurs :

- La notion de couple de variables aléatoires n'a pas été revue ; les n -uplets de variables aléatoires seront vus plus tard.

► Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :

1. Montrer que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto e^{-t-e^{-t}}$ est une densité de probabilité.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \lambda e^{-|t|}$.
 - . Déterminer λ afin que f soit une densité de probabilité.
 - . Soit X une variable aléatoire de densité f . Déterminer la fonction de répartition de X .

3. Soit $a > 0$ et X une variable aléatoire de densité f donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{\alpha} t^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t).$$

- . Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
- . Pour quelles valeurs de α , X admet-elle une espérance ? La calculer quand elle existe.

4. Soit X de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

- a. Montrer que X^2 est une variable à densité et donner une densité.
- b. Est-ce que $X + |X|$ est une variable à densité ?

5. Soit $\mu > 0$ et X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre μ .
Montrer que pour tous réels positifs x et y :

$$\mathbb{P}_{(X>x)}(X > x + y) = \mathbb{P}(X > y).$$

6. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois exponentielles de paramètres μ_1 et μ_2 .

On pose $Y = \max(X_1, X_2)$. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y et en déduire une densité de la variable Y .

7. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois exponentielles de paramètres μ_1 et μ_2 .

On pose $Z = \min(X_1, X_2)$. Déterminer la fonction de répartition F_Z de Z et en déduire la loi de Z .