

TD 7 – Probabilités discrètes

Exercice 7-7 (Espérance et antirépartition)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance.

1. Pour tout entier k , donner une relation liant $\mathbb{P}(X = k)$, $\mathbb{P}(X > k)$ et $\mathbb{P}(X > k - 1)$.

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n)$.

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $n\mathbb{P}(X > n) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$.

3. En déduire que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a : $(X > k - 1) = (X > k) \cup (X = k)$.

Par σ -additivité, on en déduit : $\mathbb{P}(X > k - 1) = \mathbb{P}(X > k) + \mathbb{P}(X = k)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=0}^n k(\mathbb{P}(X > k - 1) - \mathbb{P}(X > k)) \\ &= \sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(X > k - 1) - \sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(X > k) \\ &= \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(X > k - 1) - \sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(X > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k + 1)\mathbb{P}(X > k) - \sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(X > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} ((k + 1) - k)\mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n) \end{aligned}$$

donc : $\sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(X > n) = \bigcup_{k=n+1}^{+\infty} (X = k)$$

donc, par σ -additivité :

$$\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)$$

puis :

$$n\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = k).$$

Pour tout $k \geq n + 1$, on a $n\mathbb{P}(X = k) \leq k\mathbb{P}(X = k)$, d'où :

$$n\mathbb{P}(X > n) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k).$$

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq n\mathbb{P}(X > n) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k).$$

On suppose que X admet une espérance donc la série $\sum k\mathbb{P}(X = k)$ converge donc le reste tend vers 0 :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On déduit alors du théorème d'encadrement :

$$n\mathbb{P}(X > n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Il résulte alors de la première question :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X) \text{ i.e. } \boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k).}$$