

Problème 2 - d'après Edhec 2016 ECE

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On désigne par p un réel de $]0, 1[$.

On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V , telles que U suit la loi uniforme sur $[-3, 1]$, et V suit la loi uniforme sur $[-1, 3]$.

On considère également une variable aléatoire Z , indépendante de U et V , dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}(Z = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Z = -1) = 1 - p.$$

Enfin, on note X la variable aléatoire, définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, X(\omega) = \begin{cases} U(\omega) & \text{si } Z(\omega) = 1 \\ V(\omega) & \text{si } Z(\omega) = -1 \end{cases}$$

On note F_X , F_U et F_V les fonctions de répartition respectives des variables X , U et V .

1. Donner les expressions de $F_U(x)$ et $F_V(x)$ selon les valeurs de x .

2. *a.* Établir, grâce au système complet d'événements $((Z = 1), (Z = -1))$, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = pF_U(x) + (1 - p)F_V(x).$$

b. Vérifier que $X(\Omega) = [-3, 3]$ puis expliciter $F_X(x)$ dans les cas :

$$x < -3, -3 \leq x \leq -1, -1 \leq x \leq 1, 1 \leq x \leq 3 \text{ et } x > 3.$$

c. On admet que X est une variable à densité. Donner une densité f_X de la variable aléatoire X .

d. Établir que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et une variance $\mathbb{V}(X)$.

3. On se propose de montrer d'une autre façon que X possède une espérance et un moment d'ordre 2 puis de les déterminer.

a. Vérifier que l'on a :

$$X = U \frac{1+Z}{2} + V \frac{1-Z}{2}.$$

b. Dédire de l'égalité précédente que X possède une espérance et retrouver la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

c. En déduire également que X possède un moment d'ordre 2 et retrouver la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$.

4. *a.* Soit T une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p . Déterminer la loi de $2T - 1$.

b. On rappelle que, en Python, le module `numpy.random` dispose des fonctions `random` et `binomial` permettant de simuler respectivement une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$ et une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

Écrire des instructions en Python permettant de simuler U, V, Z puis X .

ÉLÉMENTS DE CORRECTION—

1. D'après le cours :

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -3 \\ \frac{x+3}{4} & \text{si } -3 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x+1}{4} & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

2. *a.* La formule des probabilités totales donne pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) \\ &= \mathbb{P}(Z = 1) \cdot \mathbb{P}_{[Z=1]}(X \leq x) + \mathbb{P}(Z = -1) \cdot \mathbb{P}_{[Z=-1]}(X \leq x) \\ &= p \cdot \mathbb{P}_{[Z=1]}(U \leq x) + (1 - p) \cdot \mathbb{P}_{[Z=-1]}(V \leq x) \\ &= p \cdot \mathbb{P}(U \leq x) + (1 - p) \cdot \mathbb{P}(V \leq x) \quad (\text{par indépendance}) \\ &= pF_U(x) + (1 - p)F_V(x). \end{aligned}$$

b. Comme $U(\Omega) = [-3, 1]$, $V(\Omega) = [-1, 3]$ et « $X = U$ ou $X = V$ », on a bien $X(\Omega) = [-3, 3]$.

De plus, en utilisant les expressions de F_U et F_V dans $F_X(x) = pF_U(x) + (1 - p)F_V(x)$, on obtient :

$$\begin{cases} \text{si } x < -3 : & F_X(x) = p \cdot 0 + (1 - p) \cdot 0 = 0 \\ \text{si } -3 \leq x \leq -1 : & F_X(x) = p \cdot \frac{x+3}{4} + (1 - p) \cdot 0 = p \cdot \frac{x+3}{4} \\ \text{si } -1 \leq x \leq 1 : & F_X(x) = p \cdot \frac{x+3}{4} + (1 - p) \cdot \frac{x+1}{4} = \frac{x}{4} + \frac{1}{4} + \frac{p}{2} \\ \text{si } 1 \leq x \leq 3 : & F_X(x) = p \cdot 1 + (1 - p) \cdot \frac{x+1}{4} = p + (1 - p) \cdot \frac{x+1}{4} \\ \text{si } x > 3 : & F_X(x) = p \cdot 1 + (1 - p) \cdot 1 = 1 \end{cases}$$

Remarque : On vérifiera la continuité en $-3, -1, 1$ et 3 et cela montre qu'en fait on aurait pu mettre partout des inégalités larges

c. En admettant que X est une variable à densité, on obtient une densité f_X de X en dérivant F_X , et donc, par exemple :

$$\begin{cases} \text{si } x < -3 : & f_X(x) = 0' = 0 \\ \text{si } -3 \leq x < -1 : & f_X(x) = \frac{p}{4} \\ \text{si } -1 \leq x < 1 : & f_X(x) = \frac{1}{4} \\ \text{si } 1 \leq x < 3 : & f_X(x) = \frac{1-p}{4} \\ \text{si } x \geq 3 : & f_X(x) = 1' = 0 \end{cases}$$

d. Puisque $X(\Omega) = [-3, 3]$, la variable aléatoire X admet une espérance et :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{-3} x \cdot 0 dx + \int_{-3}^{-1} x \cdot \frac{p}{4} dx + \int_{-1}^{+1} x \cdot \frac{1}{4} dx + \int_{+1}^{+3} x \cdot \frac{1-p}{4} dx + \int_{+3}^{+\infty} x \cdot 0 dx \\ &= \left[p \frac{x^2}{8} \right]_{-3}^{-1} + \left[\frac{x^2}{8} \right]_{-1}^{+1} + \left[(1-p) \frac{x^2}{8} \right]_{+1}^{+3} \\ &= \frac{p}{8} - \frac{9p}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + (1-p) \left(\frac{9}{8} - \frac{1}{8} \right) \\ &= 1 - 2p \end{aligned}$$

De la même façon :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{-3} x^2 \cdot 0 dx + \int_{-3}^{-1} x^2 \cdot \frac{p}{4} dx + \int_{-1}^{+1} x^2 \cdot \frac{1}{4} dx + \int_{+1}^{+3} x^2 \cdot \frac{1-p}{4} dx + \int_{+3}^{+\infty} x^2 \cdot 0 dx \\ &= \left[p \frac{x^3}{12} \right]_{-3}^{-1} + \left[\frac{x^3}{12} \right]_{-1}^{+1} + \left[(1-p) \frac{x^3}{12} \right]_{+1}^{+3} \\ &= p \left(\frac{-1}{12} - \frac{-27}{12} \right) + \left(\frac{1}{12} - \frac{-1}{12} \right) + (1-p) \left(\frac{27}{12} - \frac{1}{12} \right) \\ &= \frac{26}{12} (p + 1 - p) + \frac{2}{12} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Et la variance de X :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{7}{3} - (1 - 2p)^2 = \frac{4}{3} + 4p - 4p^2$$

3. a. Z est soit égale à +1, soit égale à -1.

De plus, lorsque $Z = 1$: on a $U \cdot \frac{1+Z}{2} + V \cdot \frac{1-Z}{2} = U \cdot \frac{1+1}{2} + V \cdot \frac{1-1}{2} = U = X$
et lorsque $Z = -1$: on a aussi $U \cdot \frac{1+Z}{2} + V \cdot \frac{1-Z}{2} = U \cdot \frac{1-1}{2} + V \cdot \frac{1+1}{2} = V = X$.

Donc dans tous les cas $\boxed{U \cdot \frac{1+Z}{2} + V \cdot \frac{1-Z}{2} = X}$.

b. On a alors :

$$\begin{aligned} E(X) &= E\left(U \cdot \frac{1+Z}{2} + V \cdot \frac{1-Z}{2}\right) \\ &= E\left(U \cdot \frac{1+Z}{2}\right) + E\left(V \cdot \frac{1-Z}{2}\right) \quad (\text{linéarité de l'espérance}) \\ &= E(U)E\left(\frac{1+Z}{2}\right) + E(V)E\left(\frac{1-Z}{2}\right) \quad (\text{indépendance respectives de U et V}) \\ &= E(U) \cdot \left(\frac{1+E(Z)}{2}\right) + E(V) \cdot \left(\frac{1-E(Z)}{2}\right) \quad (\text{linéarité de l'espérance}). \end{aligned}$$

Il nous reste à calculer $E(U) = \frac{-3+1}{2} = -1$, $E(V) = \frac{-1+3}{2} = 1$ et $E(Z) = 1 \cdot p + (-1) \cdot (1-p) = 2p-1$, pour obtenir :

$$\begin{aligned} E(X) &= -1 \cdot \frac{1+2p-1}{2} + 1 \cdot \frac{1-(2p-1)}{2} = \\ &= -1 \cdot p + 1 \cdot (1-p) = 1 - 2p \quad (\text{on retrouve le résultat du 2)}) \end{aligned}$$

c. Pour calculer $X^2 = (U \cdot \frac{1+Z}{2} + V \cdot \frac{1-Z}{2})^2$, on peut démontrer (ou admettre?) la formule $(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= E\left(\left(U \cdot \frac{1+Z}{2} + V \cdot \frac{1-Z}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{4} E((U + UZ + V - VZ)^2) \\ &= \frac{1}{4} E(U^2 + U^2 Z^2 + V^2 + V^2 Z^2 + 2U^2 Z + 2UV - 2UVZ + 2UVZ - 2UVZ^2 - 2 \\ &= \frac{1}{4} E(U^2 + U^2 + V^2 + V^2 + 2U^2 Z + 2UV - 2UV - 2V^2 Z) \\ &= \frac{1}{4} \{2E(U^2) + 2E(V^2) + 2E(U^2)E(Z) - 2E(V^2)E(Z)\} \end{aligned}$$

Pour * : On a utilisé la linéarité de l'espérance et l'indépendance des variables.

Pour terminer ce calcul, il nous reste à calculer les espérances :

$$E(U^2) = V(U) + E(U)^2 = \frac{(1 - (-3))^2}{12} + (-1)^2 = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$$

$$E(V^2) = V(V) + E(V)^2 = \frac{(3 - (-1))^2}{12} = \frac{4}{3} + 1^2 = \frac{7}{3}$$

Donc

$$E(X^2) = \frac{1}{4} \left(\frac{14}{3} + \frac{14}{3} + 2 \cdot \frac{7}{3} (2p-1) - 2 \cdot \frac{7}{3} (2p-1) \right) = \frac{7}{3} \quad (\text{on retrouve encore le résultat du 2})$$

4. a. Comme $T(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P(T = 1) = p$ et $P(T = 0) = 1 - p$, on a $(2T - 1)(\Omega) = \{-1, 1\}$ avec $P(2T - 1 = -1) = P(T = 0) = 1 - p$ et $P(2T - 1 = 1) = P(T = 1) = p$.

Conclusion : si T suit une loi B(p) alors $2T-1$ suit la même loi que Z.

b. $U = \text{grand}(1, 1, 'unf', -3, 1)$,
 $V = \text{grand}(1, 1, 'unf', -1, 3)$,
 $Z = 2 * \text{grand}(1, 1, 'bin', p) - 1$,
 $X = U * (1 + Z) / 2 + V * (1 - Z) / 2$,