TD 8 – Variables aléatoires à densité

Problème 1

On désigne par λ un réel strictement positif et on considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda |x| \mathrm{e}^{-\lambda x^2}.$$

1. ***a.*** Montrer que f est paire.

b. Établir que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge et donner sa valeur.

c. Montrer que la fonction f peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire X que l'on suppose, dans la suite, définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

2. ***a.*** Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x$.

b. En déduire que la variable aléatoire X possède une espérance, notée $\mathbb{E}(\mathrm{X})$, et donner sa valeur.

3. On pose $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a. Donner l'expression de la fonction de répartition $\mathrm{F_Y}$ de la variable aléatoire Y à l'aide de la fonction de répartition $\mathrm{F_X}$ de la variable aléatoire X.

b. Déterminer une densité f_Y de Y et identifier la loi de Y.

4. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.

On pose $\mathrm{W} = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-\mathrm{U})$ et on admet que W est une variable aléatoire.

Déterminer la fonction de répartition de W et en déduire la loi suivie par la variable aléatoire W.

On suppose, dans la suite, que le paramètre λ est inconnu et on souhaite l'estimer en utilisant la loi de Y.

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère des variables aléatoires $\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n$ ayant la même loi que Y. On suppose également $\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n$ indépendantes ce qui signifie que pour tous réels $y_1, \ldots, y_n$, on a l'indépendance mutuelle des événements :

$$(\mathrm{Y}_1 \leqslant y_1), \ldots, (\mathrm{Y}_n \leqslant y_n).$$

5. On considère des réels $x_1, \ldots, x_n$ strictement positifs, ainsi que la fonction L, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall \lambda \in]0;+\infty[,\ \mathrm{L}(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} f_\mathrm{Y}(x_k).$$

a. Exprimer $\mathrm{L}(\lambda)$, puis $\ln(\mathrm{L}(\lambda))$ en fonction de $\lambda, x_1, \ldots, x_n$.

b. On considère la fonction φ, définie pour tout réel λ de $]0;+\infty[$ par :

$$\varphi(\lambda) = n\ln(\lambda) - \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Montrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera z et que l'on exprimera en fonction de $x_1, \ldots, x_n$.

Que peut-on dire de z pour la fonction L ?

6. On pose dorénavant, toujours avec n supérieur ou égal à 2 :

$$\mathrm{Z}_n = \frac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Y}_k}.$$

On admet que Z_n est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
La suite $(\mathrm{Z}_n)_{n\geqslant 2}$ est appelée estimateur du maximum de vraisemblance pour λ.

On admet que la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Y}_k$ admet pour densité la fonction f_n définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t).$$

a. Vérifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{n-1}(t)\mathrm{d}t = 1$, puis montrer que Z_n possède une espérance et que :

$$\mathbb{E}(Z_n) = \frac{n}{n-1}\lambda.$$

b. En déduire une variable aléatoire, fonction simple de Z_n, dont l'espérance soit égale à λ.

Problème 2

Dans cet exercice , toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On désigne par p un réel de $]0,1[$.
On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V, telles que U suit la loi uniforme sur $[-3,1]$, et V suit la loi uniforme sur $[-1,3]$.
On considère également une variable aléatoire Z, indépendante de U et V, dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}(Z=1) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(Z=-1) = 1-p.$$

Enfin ,on note X la variable aléatoire, définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = \begin{cases} U(\omega) & \text{si} \quad Z(\omega) = 1 \\ V(\omega) & \text{si} \quad Z(\omega) = -1 \end{cases}$$

On note F_X, F_U et F_V les fonctions de répartition respectives des variables X, U et V .

1. Donner les expressions de $F_U(x)$ et $F_V(x)$ selon les valeurs de x.

2. *a.* Établir, grâce au système complet d'événements $((Z=1),(Z=-1))$, que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = pF_U(x) + (1-p)F_V(x).$$

b. Vérifier que $X(\Omega) = [-3,3]$ puis expliciter $F_X(x)$ dans les cas :

$$x < -3,\ -3 \leqslant x \leqslant -1,\ -1 \leqslant x \leqslant 1,\ 1 \leqslant x \leqslant 3 \text{ et} x > 3.$$

c. On admet que X est une variable à densité. Donner une densité f_X de la variable aléatoire X.

d. Établir que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et une variance $\mathbb{V}(X)$.

3. On se propose de montrer d'une autre façon que X possède une espérance et un moment d'ordre 2 puis de les déterminer.

a. Vérifier que l'on a :

$$X = U\frac{1+Z}{2} + V\frac{1-Z}{2}.$$

b. Déduire de l'égalité précédente que X possède une espérance et retrouver la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

c. En déduire également que X possède un moment d'ordre 2 et retrouver la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$.

4. *a.* Soit T une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. Déterminer la loi de $2T-1$.

b. On rappelle que, en Python, le module `numpy.random` dispose des fonctions `random` et `binomial` permettant de simuler respectivement une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$ et une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

Écrire des instructions en Python permettant de simuler U, V, Z puis X.