TD 9 – Variables aléatoires à densité

Problème - d'après ESSEC 2 2010 ECE

III - Système Poissonien

On considère maintenant un système dont le fonctionnement est défini comme suit : pour tout réel t positif, la variable aléatoire N_t à valeurs entières représente le nombre de pannes qui se produisent dans l'intervalle $[0,t]$. On considère que le système est réparé immédiatement après chaque panne.
On notera en particulier que pour $s \leqslant t$, on a $N_s \leqslant N_t$.
On suppose qu'on a les quatre propriétés suivantes :

- $N_0 = 0$ et $0 < \mathbb{P}(N_t = 0) < 1$ pour tout $t > 0$;
- pour tous réels $t_0, t_1, \dots, t_n$ tels que $0 \leqslant t_0 < t_1 < \dots < t_n$ les variables $N_{t_0}, N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ sont mutuellement indépendantes (accroissements indépendants) ;
- pour tous réels s et t tels que $0 < s < t$, $N_t - N_s$ suit la même loi que N_{t-s} (accroissements stationnaires) ;
- $\dfrac{P(N_h > 1)}{h} \xrightarrow[h \to 0^+]{} 0$.

On pose, sous réserve d'existence, pour tout $u \geqslant 0$ et pour tout s dans $[0,1]$, $G_u(s) = \mathbb{E}(s^{N_u})$, avec la convention $0^0 = 1$.

12. Justifier que pour tout $u \geqslant 0$, $G_u(s)$ existe pour tout s dans $[0,1]$ et que l'on a, pour tout s dans $[0,1]$:

$$G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N_u = k)s^k.$$

Par ailleurs, **on admet** que, pour tous réels u et v positifs ou nuls, et pour tout réel s tel que $0 \leqslant s \leqslant 1$, on a : $G_{u+v}(s) = G_u(s)G_v(s)$.

13. On fixe s tel que $0 \leqslant s \leqslant 1$.

a. Montrer que $G_1(s) > 0$.

b. On pose $\theta(s) = -\ln G_1(s)$ et, pour $u \geqslant 0$, $\psi(u) = G_u(s)$.
Montrer que $\psi(k) = e^{-k\theta(s)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c. Soit q un entier naturel non nul. En considérant $G_{\frac{1}{q}}(s)$, montrer que :

$$\psi\left(\frac{1}{q}\right) = e^{-\frac{1}{q}\theta(s)}.$$

d. Montrer que si p est entier naturel et q un entier naturel non nul, on a :

$$\psi(r) = e^{-r\theta(s)} \text{ où on a posé } r = \frac{p}{q}.$$

e. Montrer que pour tout réel positif u : $G_u(s) = e^{-u\theta(s)}$.

f. En déduire que pour tout $s \in]0,1]$:

$$\frac{G_h(s) - 1}{h} \xrightarrow[h \to 0^+]{} -\theta(s).$$

14. Montrer par ailleurs que pour tout $s \in [0,1]$:

$$G_h(s) - 1 = \mathbb{P}(N_h = 1)(s-1) + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(N_h = k)(s^k - 1).$$

15. Montrer que pour tout $s \in]0,1]$:

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(N_h = k)(s^k - 1)}{h} \xrightarrow[h \to 0^+]{} 0.$$

16. ***a.*** En déduire qu'il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que :

$$\alpha = \lim_{h \to 0^+} \frac{\mathbb{P}(N_h = 1)}{h}$$

et que pour pour tout $s \in]0,1]$, $\theta(s) = \alpha(1-s)$.

b. En considérant $G_u(0)$, montrer que $\alpha > 0$.

c. On fixe un temps $u > 0$. Montrer que pour tout $s \in]0,1]$:

$$G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N_u = k)s^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!}]s^k.$$

d. Déduire que pour tout $u > 0$, la variable aléatoire N_u suit la loi de Poisson de paramètre αu.

17. Une famille de variables aléatoires ayant les mêmes caractéristiques que la famille $(N_t)_{t \geqslant 0}$ est un **processus de Poisson** et la constante α s'appelle le **paramètre** du processus de Poisson.

Soit T la variable aléatoire désignant la date de la première panne. Soit $t > 0$. Comparer les événements $(T > t)$ et $(N_t = 0)$. En déduire que T suit la loi exponentielle de paramètre α.

18. Pour t positif fixé, on pose pour h réel positif, $\tilde{N}_h = N_{t+h} - N_t$.

a. Montrer que $\tilde{N}_h$ est la variable aléatoire qui représente le nombre de pannes survenues dans l'intervalle de temps $]t, t+h]$.

b. Montrer que la famille $(\tilde{N}_h)_{h \geqslant 0}$ est un processus de Poisson de paramètre α.

c. En déduire que la première panne survenant après la date t se produit à une date suivant la loi exponentielle de paramètre α.

d. En déduire que le processus de Poisson a la propriété que, pour chaque date t donnée, le taux de défaillance du système après t est constant.

Éléments de correction—
(Je n'en suis pas l'auteur et c'est parfois rédigé de façon peu conventionnelle !)

12. Pour tout $u \geqslant 0$ et tout $0 \leqslant s \leqslant 1$:

$$\left|s^k \mathbb{P}(N_u = k)\right| \leqslant \mathbb{P}(N_u = k)$$

et la série de terme général $\mathbb{P}(N_u = k)$ converge. Donc, par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série de terme général $s^k \mathbb{P}(N_u = k)$ converge absolument.
D'après le théorème de transfert, $\mathbb{E}(s^{N_u})$ existe et :

$$G_u(s) = \mathbb{E}(s^{N_u}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N_u = k)s^k.$$

Remarque–
Pour tous réels u et v positifs ou nuls, et pour tout réel s tel que $0 \leqslant s \leqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned} G_{u+v}(s) &= \mathbb{E}\left(s^{N_{u+v}}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(s^{N_u + (N_{u+v} - N_u)}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(s^{N_u} s^{N_{u+v} - N_u}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(s^{N_u}\right)\mathbb{E}\left(s^{N_{u+v} - N_u}\right) \end{aligned}$$

car N_u et $N_{i+v} - N_u$ sont indépendantes et car $N_{u+v} - N_u$ a la même loi que N_v. On a donc bien l'élément admis $G_{u+v}(s) = G_u(s)G_v(s)$.

13. ***a.*** $G_1(s) = \mathbb{E}\left(s^{N_1}\right)$ et comme $0 < \mathbb{P}(N_1 = 0) < 1$ alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(s^{N_1}\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} s^k \mathbb{P}(N_1 = k) \\ &\geqslant s^0 \mathbb{P}(N_1 = 0) > 0 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{G_1(s) > 0}$.

b. On a donc $\psi(k) = G_k(s)$ et on a alors par récurrence :

- Pour $k = 0$: $\psi(0) = G_0(s) = E\left(s^{N_0}\right)$ avec $P(N_0 = 0) = 1$ on a donc $\psi(0) = s^0 = 1$ et $\mathbf{e}^{-0\theta(s)} = 1$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $G_k(s) = \mathbf{e}^{-k\theta(s)}$ alors $G_{k+1}(s) = G_k(s)\,G_1(s)$
avec $\theta(s) = -\ln G_1(s)$ on a $G_1(s) = e^{-\theta(s)}$ et donc
$G_{k+1}(s) = e^{-k\theta(s)} e^{-\theta(s)} = e^{-(k+1)\theta(s)}$
- *Conclusion :* $\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N} : G_k(s) = \mathbf{e}^{-k\theta(s)}}$

c. Soit q un entier naturel non nul.
On a (récurrence) $G_{k\frac{1}{q}}(s) = \left(G_{\frac{1}{q}}(s)\right)^k$ donc avec $k = q$ on a $G_1(s) = \left(G_{\frac{1}{q}}(s)\right)^q$
et donc $G_{\frac{1}{q}}(s) = (G_1(s))^{1/q} = \mathbf{e}^{-\frac{1}{q}\theta(s)}$

Conclusion : $\boxed{\psi(\frac{1}{q}) = \mathbf{e}^{-\frac{1}{q}\theta(s)}.}$

d. Et on a à nouveau par récurrence pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\psi(\frac{1}{q})\right)^p = \left(\mathbf{e}^{-\frac{1}{q}\theta(s)}\right)^p = \mathbf{e}^{-\frac{p}{q}\theta(s)}$$

Conclusion : $\boxed{\text{si } r \in \mathbb{Q}_+ \text{ alors } \psi(r) = \mathbf{e}^{-r\theta(s)}}$

e. On encadre tout réel u par deux suites de rationnels de limite vers u (par exemple $s_n = \dfrac{\lfloor nu \rfloor}{n}$ et $r_n = \dfrac{\lfloor nu \rfloor + 1}{n}$).
$s_n \leqslant u \leqslant r_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on regarde le sens de variation de ψ pour encadrer les images.
Si $0 \leqslant u \leqslant v$ alors $N_u \leqslant N_v$ et comme $s \in [0,1]$, la fonction $x \to s^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $s^{N_u} \geqslant s^{N_v}$ et $\mathbb{E}\left(s^{N_u}\right) \geqslant \mathbb{E}\left(s^{N_v}\right)$ soit $\psi(u) \geqslant \psi(v)$.
Donc la fonction ψ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ d'où $\psi(s_n) \geqslant \psi(u) \geqslant \psi(r_n)$
et quand $n \to +\infty$ on a $s_n \to u$ donc $\psi(s_n) = \mathbf{e}^{-s_n\theta(s)} \to \mathbf{e}^{-u\theta(s)}$ et de même pour $\psi(r_n)$
Donc par passage à la limite dans l'inégalité précédente : $\psi(u) = \mathbf{e}^{-u\theta(s)}$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout réel positif } u,\ G_u(s) = \mathbf{e}^{-u\theta(s)}}$

f. Comme $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$, on a $\mathrm{e}^{-h\theta(s)} - 1 \underset{h\to 0^+}{\sim} -h\theta(s)$ donc $\dfrac{\mathbf{e}^{-h\theta(s)} - 1}{-h\theta(s)} \to 1$ et

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } s \in [0,1],\ \lim\limits_{h\to 0, h>0} \dfrac{G_h(s) - 1}{h} = -\theta(s)}$

14. Par ailleurs que pour tout $s \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} G_h(s) - 1 &= \sum_{k=0}^{+\infty} s^k\, P(N_h = k) - 1 \\ &= P(N_h = 0) + s^1\, P(N_h = 1) + \sum_{k=2}^{+\infty} s^k\, P(N_h = k) \end{aligned}$$

et d'autre part

$$P(N_h = 1)(s-1) + \sum_{k=2}^{+\infty} P(N_h = k)\left(s^k - 1\right) \text{si converge}$$

$$= s\,P(N_h = 1) - P(N_h = 1) + \sum_{k=2}^{+\infty} s^k\, P(N_h = k) - \sum_{k=2}^{+\infty} P(N_h = k)$$

$$= s\,P(N_h = 1) + \sum_{k=2}^{+\infty} s^k\, P(N_h = k) - \sum_{k=1}^{+\infty} P(N_h = k) \text{ qui convergent}$$

$$= P(N_h = 0) + s\,P(N_h = 1) + \sum_{k=2}^{+\infty} s^k\, P(N_h = k) - \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_h = k)$$

$$= G_h(s) - 1$$

Conclusion : $\boxed{G_h(s) - 1 = P(N_h = 1)(s-1) + \sum_{k=2}^{+\infty}\left(s^k - 1\right)P(N_h = k)}$

15. On pense alors à

$$\frac{1}{h}\sum_{k=2}^{+\infty}\left(s^k - 1\right)P(N_h = k) = \frac{G_h(s) - 1}{h} - \frac{P(N_h = 1)}{h}(s-1)$$

mais la limite de $\dfrac{P(N_h = 1)}{h}$ doit être déduite à la question suivante ...

- Deux cas à considérer : si $s = 1$: $\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}(N_h = k)(s^k - 1) = 0$ d'où la limite.
- Et si $s \in [0,1[$, on va utiliser l'hypothèse : $\lim\limits_{h\to 0, h>0} \dfrac{P(N_h > 1)}{h}$ en majorant.

Pour tout $k \geq 2$: $(\mathrm{N}_h = k) \subset (\mathrm{N}_h > 1)$ donc $\mathrm{P}(\mathrm{N}_h = k) \leq \mathrm{P}(\mathrm{N}_h > 1)$ et (séries convergentes)

$$0 \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{N}_h = k) s^k \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{N}_h > 1) s^k = \mathrm{P}(\mathrm{N}_h > 1) \frac{s^2}{1-s}$$

$$0 \leqslant \frac{\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{N}_h = k) s^k}{h} \leqslant \frac{\mathrm{P}(\mathrm{N}_h > 1)}{h} \frac{s^2}{1-s}$$

et par encadrement $\dfrac{\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{N}_h = k) s^k}{h} \to 0$

Enfin, $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{N}_h = k) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{N}_h = k) = 1$ donc

$$0 \leqslant \frac{\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{N}_h = k)}{h} \leqslant \frac{1}{h}$$

et $\dfrac{\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{N}_h = k)}{h} \to 0$ par encadrement.

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } s \in [0,1],\ \lim_{h \to 0, h>0} \dfrac{\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathrm{N}_h = k)(s^k - 1)}{h} = 0}$

16. (a) On réutilise $\mathrm{G}_h(s) - 1 = \mathrm{P}(\mathrm{N}_h = 1)(s-1) + \sum_{k=2}^{+\infty} \left(s^k - 1\right) \mathrm{P}(\mathrm{N}_h = k)$ pour en extraire

$$\mathrm{P}(\mathrm{N}_h = 1) = \left[\mathrm{G}_h(s) - 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} \left(s^k - 1\right) \mathrm{P}(\mathrm{N}_h = k)\right] / (s-1) \text{ et}$$

$$\frac{\mathrm{P}(\mathrm{N}_h = 1)}{h} = \left[\frac{\mathrm{G}_h(s) - 1}{h} - \frac{\sum_{k=2}^{+\infty} \left(s^k - 1\right) \mathrm{P}(\mathrm{N}_h = k)}{h}\right] / (s-1)$$
$$\to \frac{-\theta(s) + 0}{s-1}$$

et avec $\alpha = \dfrac{-\theta(s)}{s-1} \geq 0$ (car une probabilité l'est)

Conclusion : $\boxed{\alpha = \lim_{h \to 0, h>0} \dfrac{\mathbf{P}(\mathrm{N}_h = 1)}{h} \geq 0 \text{ et pour tout } s \in [0,1],\ \theta(s) = -\alpha(s-1) = \alpha(1-s)}$

(b) On a en particulier $\alpha = \theta(0) = -\ln \mathrm{G}_1(0)$.

Et comme $\mathrm{G}_1(0) = \mathrm{E}\left(0^{\mathrm{N}_1}\right) = 0^0 \mathrm{P}(\mathrm{N}_1 = 0) + 0 = \mathrm{P}(\mathrm{N}_1 = 0) < 1$ par hypothèse (pour tout $t > 0$: $0 < \mathrm{P}(\mathrm{N}_t = 0) < 1$)

alors $\mathrm{P}(\mathrm{G}_1(0)) < 0$ et *Conclusion :* $\boxed{\alpha > 0.}$

17. ***a.*** On a vu que pour tout réel positif u, $\mathrm{G}_u(s) = \mathbf{e}^{-u\theta(s)}$.au 2e)

et $\theta(s) = -\alpha(s-1) = \alpha(1-s)$ au 5a)

donc $\mathrm{G}_u(s) = \mathbf{e}^{-u\alpha(1-s)}$

D'autre part :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left[\mathbf{e}^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!}\right] s^k = e^{-\alpha u} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\alpha u s)^k}{k!}$$
$$= e^{-\alpha u} e^{\alpha u s}$$
$$= e^{-\alpha u(1-s)}$$
$$= \mathrm{G}_u(s)$$

et finalement pour tout $s \in [0,1]$,

$$\mathrm{G}_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{N}_u = k) s^k \text{ .(transfert)}$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\mathbf{e}^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!}\right] s^k$$

b. Si la somme était finie, on aurait une égalité de polynômes pour une infinité de valeur, d'où identification des coefficients.

Mais on ne dispose pas au programme d'un tel théorème sur les sommes de séries.

On montre alors par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\mathrm{P}(\mathrm{N}_u = k) = \mathbf{e}^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!}$

La récurrence a besoin de tous les termes précédent (récurrence généralisée)

— Pour $n = 0$ on utilise l'égalité pour $s = 0$ et il ne reste que le terme où la puissance de s est nulle : $\mathrm{P}(\mathrm{N}_u = 0) = \mathbf{e}^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^0}{0!}$

— Soit $n \geq 0$ tel que pour tout $k \leqslant n$: $\mathrm{P}(\mathrm{N}_u = k) = \mathbf{e}^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!}$

alors, on simplifie de part et d'autre ces $n+1$ premiers termes égaux et il reste.

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{N}_u = k) s^k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left[\mathbf{e}^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!}\right] s^k$$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{N}_u = k) s^{k-n-1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left[\mathbf{e}^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!}\right] s^{k-n-1}$$

et en particulier pour $s = 0$ il ne reste que $\mathrm{P}(\mathrm{N}_u = n+1) = \mathbf{e}^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^{n+1}}{(n+1)!}$

Pour simplifier par s^{n+1}, il faut que s soit non nul. On ne peut donc pas utiliser la formule pour $s = 0$ et il faut procéder par passage à la limite :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{N}_u = k) s^{k-n-1}$$
$$= \mathrm{P}(\mathrm{N}_u = n+1) + s \sum_{k=n+2}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{N}_u = k) s^{k-n-2}$$

et comme $\mathrm{P}(\mathrm{N}_u = k) s^{k-n-2} \leqslant s^{k-n-2}$ alors

$$0 \leqslant s \sum_{k=n+2}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{N}_u = k) s^{k-n-2} \leqslant s \sum_{k=n+2}^{+\infty} s^{k-n-2} = s \frac{1}{1-s}$$

et quand $s \to 0^+$, par encadrement, $\displaystyle\sum_{k=n+2}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{N}_u = k) s^{k-n-2} \to 0$ et de même pour la seconde somme où $\left[\mathbf{e}^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!}\right]$ est une probabilité de $\mathcal{P}(\alpha u)$ et donc inférieur à 1.

— *Conclusion :* $\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{N}_u = k) = \frac{(\alpha u)^k}{k!} \mathbf{e}^{-\alpha u} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \text{ et donc } \mathrm{N}_u \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha u)}$

18. Soit T la variable aléatoire désignant la date de la première panne. Soit $t > 0$.

T > t signifie que la première panne survient après t, c'est à dire qu'il n'y a pas eu de panne dans $[0, t]$ donc

$(T > t) = (N_t = 0)$ et $P(T > t) = P(N_t = 0) = \dfrac{(\alpha t)^0}{0!}\mathbf{e}^{-\alpha t} = \mathbf{e}^{-\alpha t}$

et elle vaut 1 si $t < 0$.

Donc $P(T \leqslant t) = 1 - e^{-\alpha t}$ et

Conclusion : $\boxed{T \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)}$

19. Pour t positif fixé, on pose pour h réel positif, $\tilde{N}_h = N_{t+h} - N_t$.

a. N_{t+h} est le nombre de panne dans $[0, t+h]$ et N_t.dans l'intervalle $[0, t]$ donc $N_{t+h} - N_t = \tilde{N}_h$ est la variable aléatoire qui représente le nombre de pannes survenues dans l'intervalle de temps $]t, t+h]$.

b. Or $\tilde{N}_h = N_{t+h} - N_t$ a la même loi que N_h donc on liste les 4 propriétés :

— $\tilde{N}_{h_2} - \tilde{N}_{h_1} = N_{t+h_2} - N_t - \left(N_{t+h_1} - N_t\right) = N_{t+h_2} - N_{t+h_1}$ a la même loi que $N_{h_2-h_1}$ donc que $\tilde{N}_{h_2-h_1}$

— et de la même façon pour l'indépendance de $\tilde{N}_{h_0}$, $\tilde{N}_{h_1} - \tilde{N}_{h_0}$...

— $\tilde{N}_0 = N_t - N_t = 0$ et $P\left(\tilde{N}_h = 0\right) = P(N_{t+h} - N_t = 0) = P(N_h = 0)$ est donc compris dans $]0, 1[$ pour tout $h > 0$.

— et de même pour le a limite où l'on retombe sur celle de N_h

donc la famille $(\tilde{N}_h)_{h\geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre α.

c. Donc en notant T la date de la première panne après t on retrouve $T \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$

d. Le taux de défaillance après t pour une loi exponentielle est le paramètre de la loi donc pour un processus de Poisson et pour chaque date t donnée, le taux de défaillance du système après t est constant.