TD 10 – Algèbre bilinéaire

Exercice 10-1

Montrer que pour tous réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}$.

Préciser le cas d'égalité.

Exercice 10-2

1. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que :

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}\left(\mathrm{A}^2\right) \leqslant \mathrm{Tr}\left({}^t\mathrm{A}\mathrm{A}\right).$$

2. Montrer que l'on a $\mathrm{Tr}\left(\mathrm{A}^2\right) = \mathrm{Tr}\left({}^t\mathrm{A}\mathrm{A}\right)$ si et seulement si A est une matrice symétrique.

Exercice 10-3

Soit $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs non nuls d'un espace euclidien E. Établir l'équivalence entre les assertions :

i. les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont orthogonaux ;

ii. pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\|\lambda\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \geqslant \|\mathbf{v}\|$.

Exercice 10-4

Soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique et $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice orthogonale. On désigne par $\mathbf{c}_j$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice colonne dans la base canonique est la j-ème colonne de A .

1. Montrer que : $\displaystyle\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n}\mathbf{e}_i\right\| \cdot \left\|\sum_{j=1}^{n}\mathbf{c}_j\right\|$.

2. On note X la matrice colonne constituée de 1, calculer ${}^t(\mathrm{AX})(\mathrm{AX})$.

3. En déduire l'inégalité : $\displaystyle\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right| \leqslant n$.

Exercice 10-5 (inégalité de Bessel)

Soit $\mathscr{F} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p)$ une famille orthonormée d'un espace euclidien $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Montrer que :

$$\forall \mathbf{u} \in \mathrm{E},\ \sum_{i=1}^{p}\langle\mathbf{u}, \mathbf{e}_i\rangle^2 \leqslant \|\mathbf{u}\|^2.$$

Exercice 10-6

Soit $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ une famille de vecteurs d'un espace euclidien telle que :

$$\forall\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n, \quad \left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\mathbf{u}_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\|\mathbf{u}_i\|^2.$$

Montrer que la famille est orthogonale.

Exercice 10-7 (polynômes de Tchebychev)

On définit une suite de polynômes $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par la récurrence :

$$\mathrm{T}_0 = 1,\ \mathrm{T}_1(x) = x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\quad \mathrm{T}_{n+2}(x) = 2x\mathrm{T}_{n+1}(x) - \mathrm{T}_n(x).$$

1. ***a.*** Soit $n \in \mathbb{N}$, justifier que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = 2\cos((n+1)\theta)\cos(\theta).$$

b. Montrer que pour tout réel θ et tout entier naturel n :

$$\cos(n\theta) = \mathrm{T}_n(\cos(\theta)).$$

c. Vérifier que T_n est l'unique polynôme vérifiant la relation précédente. Préciser le degré de T_n.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[x]^2$ par :

$$\langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

a. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.

b. Vérifier que la famille $(\mathrm{T}_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthogonale pour ce produit scalaire.

c. Déterminer $\|\mathrm{T}_k\|$ pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$.