CHAPITRE

IX

VECTEURS ALÉATOIRES

Sommaire

A - Couples de variables aléatoires discrètes

A.1 - Loi d'un couple de variables aléatoires

Proposition et définition IX-1

On dit que deux variables aléatoires X et Y définies sur un même un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sont ***indépendantes*** lorsqu'elles vérifient l'une des conditions équivalentes suivantes :

i. pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{P}\Big((X \leqslant x) \cap (Y \leqslant y)\Big) = \mathbb{P}(X \leqslant x)\,\mathbb{P}(Y \leqslant y)$;

ii. pour tous intervalles I et J de $\mathbb{R}$, $\mathbb{P}\Big((X \in I) \cap (Y \in J)\Big) = \mathbb{P}(X \in I)\,\mathbb{P}(Y \in J)$;

Exemple

On lance deux dés usuels équilibrés : on note X la somme des deux résultats et Y leur produit.

L'événement $\Big((X = 6) \cap (Y = 6)\Big)$ est impossible alors que $\mathbb{P}(X = 6)\mathbb{P}(Y = 6) \neq 0$.

Donc les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Définition IX-2

1. On dit que (X, Y) est un ***couple de variables aléatoires*** sur Ω lorsque X et Y sont des variables aléatoires sur Ω.
2. On appelle *loi* du couple (X, Y) la fonction :

$$F_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \mathbb{P}\Big((X \leqslant x) \cap (Y \leqslant y)\Big).$$

Remarques

1 ▹ Si X et Y sont indépendantes alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $F_{(X,Y)}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$.

2 ▹ Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, alors la loi du couple (X, Y) est déterminée par la donnée des :

$$\mathbb{P}\Big((X = x) \cap (Y = y)\Big) \text{ pour } (x, y) \in (X, Y)(\Omega).$$

Notons que l'on travaille souvent avec $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ plutôt qu'avec $(X, Y)(\Omega)$.

La donnée de ces nombres définit la ***loi conjointe*** du couple (X, Y).

Les lois de X et de Y sont appelées les *lois marginales* du couple (X, Y).

Puisque $\{(Y = y)\ ;\ y \in Y(\Omega)\}$ est un système complet d'événements, la formule des probabilités totale assure que la loi de X est :

$$X(\Omega) \to [0, 1],\ x \mapsto \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}\Big((X = x) \cap (Y = y)\Big).$$

De même, la loi de Y est :

$$Y(\Omega) \to [0, 1],\ y \mapsto \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}\Big((X = x) \cap (Y = y)\Big).$$

Exemples

1 ▹ On tire au hasard deux numéros dans $[\![1,n]\!]$, on note X le plus petit des deux et Y le plus grand. Alors :

On a : $X(\Omega) \times Y(\Omega) = [\![1,n-1]\!] \times [\![2,n]\!]$.

Cependant : $(X,Y)(\Omega) = \{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ ; \ i < j\}$.

2 ▹ Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On tire successivement deux boules de cette urne. On considère la v.a. X valant 1 si la première boule tirée est blanche et 0 sinon, et on considère la v.a. Y valant 1 si la seconde boule tirée est blanche et 0 sinon.

Alors (X,Y) est un couple de v.a. qui prend ses valeurs dans $\{0,1\}^2$.

3 ▹ Considérons à nouveau l'urne contenant 3 boules blanches et 4 boules noires. On suppose que le tirage est effectué sans remise. La loi du couple (X,Y) est alors donnée par :

4 ▹ Considérons le même exemple mais, cette fois-ci, le tirage est effectué avec remise. La loi du couple (X,Y) est alors donnée par :

5 ▹ En représentant la loi conjointe sous forme de tableau, il suffit de faire les totaux par lignes et par colonnes pour obtenir les lois marginales.

Par exemple considérons à nouveau l'urne contenant 3 boules blanches et 4 boules noires pour un tirage sans remise et pour un tirage avec remise.

Remarque

La connaissance des lois marginales ne suffit donc pas pour reconstituer la loi du couple. Pour ce faire, on a besoin de la notion loi conditionnelle. Rappelons que la loi conditionnelle de X sachant $(Y = y)$ est :

$$X(\Omega) \to [0,1], \ x \mapsto \mathbb{P}\Big(X = x | Y = y\Big) = \frac{\mathbb{P}(X = x \ , \ Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}.$$

A.2 - Somme de deux variables aléatoires discrètes

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs entières. La loi de la somme $Z = X + Y$ est donnée par :

$$Z(\Omega) = \Big\{ i + j \ ; \ i \in X(\Omega) \text{ et } j \in Y(\Omega) \Big\}$$

$$\forall k \in Z(\Omega),\ \mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \\ \text{t.q. } i+j=k}} \mathbb{P}\Big((X = i) \cap (Y = j) \Big).$$

En effet, tout d'abord, on a :

$$\mathbb{P}\Big((X = i) \cap (Y = j) \Big) = \mathbb{P}\Big((X + Y = i + j) \cap (Y = j) \Big)$$

et les événements $(Y = 0), (Y = 1), \ldots$ forment un système complet d'événements donc la FPT donne :

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\Big((X + Y = k) \cap (Y = j) \Big)$$

puis :

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\Big((X = k - j) \cap (Y = j) \Big)$$

et enfin :

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \\ \text{t.q. } i+j=k}} \mathbb{P}\Big((X = i) \cap (Y = j) \Big).$$

Exemple

On considère à nouveau l'urne contenant 3 boules blanches et 4 boules noires pour un tirage sans remise et on note $Z = X + Y$.

De façon générale, si $Z = u(X, Y)$ alors on détermine $Z(\Omega)$ en considérant les images par u des $(x, y) \in (X, Y)(\Omega)$ puis :

$$\forall z \in Z(\Omega),\ \mathbb{P}(Z = z) = \sum_{\substack{(x,y)\in(X,Y)(\Omega) \\ \text{t.q. } u(x,y)=z}} \mathbb{P}\Big((X = x) \cap (Y = y) \Big).$$

Exemples

1 ▹ Montrons que si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, Y suit une loi de Poisson de paramètre μ et si X et Y sont indépendantes alors $X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

On a $(X+Y)(\Omega)=\mathbb{N}$ et en utilisant le système complet d'événements associé à la variable X, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=k) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X+Y=k, X=j)\\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=k-j, X=j)\\ &= \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(Y=k-j, X=j),\end{aligned}$$

et l'indépendance de X et Y donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=k) &= \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X=j)\,\mathbb{P}(Y=k-j)\\ &= \sum_{j=0}^{k} \frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\frac{\mu^{k-j}}{(k-j)!}e^{-\mu}\\ &= e^{-(\lambda+\mu)}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{k!}\frac{k!}{j!(k-j)!}\lambda^j\mu^{k-j}.\end{aligned}$$

La formule du binôme donne :

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = e^{-(\lambda+\mu)}\frac{1}{k!}(\lambda+\mu)^k,$$

donc $X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

2 ▹ Soit X et Y deux variables indépendantes suivant respectivement des lois $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(m,p)$ où $p \in]0,1[$.

Déterminons la loi de $Z=X+Y$.

A.3 - Maximum ou minimum de variables indépendantes

On considère deux variables aléatoires réelles X et Y que l'on suppose indépendantes.

► Posons $A = \max\{X, Y\}$ alors, pour tout $t \in A(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned} F_A(t) &= \mathbb{P}\Big(X \leqslant t,\ Y \leqslant t\Big) \\ &= \mathbb{P}(X \leqslant t)\ \mathbb{P}(Y \leqslant t) \\ &= F_X(t)\ F_Y(t). \end{aligned}$$

Notons que si X et Y sont discrètes, à valeurs entières, alors $A = \max\{X, Y\}$ est également discrète à valeurs entières et :

$$\forall k \in A(\Omega),\ \mathbb{P}(A = k) = \mathbb{P}(A \leqslant k) - \mathbb{P}(A \leqslant k-1) = F_A(k) - F_A(k-1).$$

► Posons $B = \min\{X, Y\}$ alors, pour tout $t \in B(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B \geqslant t) &= \mathbb{P}\Big(X \geqslant t,\ Y \geqslant t\Big) \\ &= \mathbb{P}(X \geqslant t)\ \mathbb{P}(Y \geqslant t). \end{aligned}$$

Notons que si X et Y sont discrètes, à valeurs entières, alors $B = \min\{X, Y\}$ est également discrète à valeurs entières et :

$$\forall k \in B(\Omega),\ \mathbb{P}(B = k) = \mathbb{P}(B \geqslant k) - \mathbb{P}(B \geqslant k+1).$$

Exemple

Déterminons la loi du minimum de deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une loi géométrique.

On suppose que $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{G}(p')$ avec X et Y indépendantes, on pose $Z = \min\{X, Y\}$ alors $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Tout d'abord, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geqslant k) &= \sum_{i=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i) \\ &= \sum_{i=k}^{+\infty} p(1-p)^{i-1} \\ &= (1-p)^{k-1} \sum_{j=0}^{+\infty} p(1-p)^j \\ &= (1-p)^{k-1}. \end{aligned}$$

On pouvait aussi remarquer que l'événement $(X \geqslant k)$ est réalisé lorsque l'on a des échecs de la première à la $(k-1)$-ième expérience.

On a de même :

$$\mathbb{P}(Y \geqslant k) = (1-p')^{k-1}.$$

D'où pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\min\{X, Y\} \geqslant k) &= \mathbb{P}(X \geqslant k)\ \mathbb{P}(Y \geqslant k) \\ &= (1-p)^{k-1}\ (1-p')^{k-1}, \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\min\{X,Y\}=k) &= \mathbb{P}(\min\{X,Y\}\geqslant k)-\mathbb{P}(\min\{X,Y\}\geqslant k+1)\\ &= (1-p)^{k-1}\,(1-p')^{k-1}-(1-p)^{k}\,(1-p')^{k}\\ &= \Big((1-p)\,(1-p')\Big)^{k-1}\Big(1-(1-p)\,(1-p')\Big).\end{aligned}$$

On en déduit que le minimum des variables X et Y suit la loi géométrique de paramètre $1-(1-p)\,(1-p')$.

A.4 - Espérance pour un couple discret

Proposition IX-3 (théorème de transfert)

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes et $u:(X,Y)(\Omega)\to\mathbb{R}$.

Sous réserve de convergence absolue, l'espérance de $u(X,Y)$ est donnée par :

$$\mathbb{E}\Big(u(X,Y)\Big)=\sum_{(x,y)\in(X,Y)(\Omega)}u(x,y)\,\mathbb{P}\Big((X=x)\cap(Y=y)\Big).$$

Exemple

On lance 2 fois (de façons indépendantes) un dé à 6 faces, équilibré. On note X la variable aléatoire égale au nombre de chiffres impairs obtenus et Y la variable aléatoire égale au nombre de 2 obtenus. Calculons les espérances de X, de Y et de XY.

L'univers est $\Omega=[\![1,6]\!]^2$, la probabilité est uniforme et les lancers sont indépendants.

On en déduit :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X=0,Y=0)=\mathbb{P}\Big(\{(4,4),(4,6),(6,4),(6,6)\}\Big)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9},\\
&\mathbb{P}(X=0,Y=1)=\mathbb{P}\Big(\{(2,4),(2,6),(4,2),(6,2)\}\Big)=\frac{1}{9},\\
&\mathbb{P}(X=0,Y=2)=\mathbb{P}\Big(\{(2,2)\}\Big)=\frac{1}{36},\\
&\mathbb{P}(X=1,Y=0)=\mathbb{P}\Bigg(\bigcup_{i\in\{1;3;5\}}\{(i,4),(i,6),(4,i),(6,i)\}\Bigg)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3},\\
&\mathbb{P}(X=1,Y=1)=\mathbb{P}\Bigg(\bigcup_{i\in\{1;3;5\}}\{(i,2),(2,i)\}\Bigg)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},\\
&\mathbb{P}(X=1,Y=2)=\mathbb{P}(\emptyset)=0,\\
&\mathbb{P}(X=2,Y=0)=\mathbb{P}\Bigg(\bigcup_{i\in\{1;3;5\}}\bigcup_{j\in\{1;3;5\}}\{(i,j)\}\Bigg)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}\\
\text{et }&\mathbb{P}(X=2,Y=1)=\mathbb{P}(X=2,Y=2)=0.
\end{aligned}$$

En résumé :

Y \ X	0	1	2	loi de Y
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{25}{36}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{5}{18}$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{36}$
loi de X	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

On en déduit :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1,$$
$$\mathbb{E}(Y) = 0 \times \frac{25}{36} + 1 \times \frac{5}{18} + 2 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{3},$$

et le théorème de transfert donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \sum_{(k,\ell)\in[\![0,2]\!]^2} k\,\ell\,\mathbb{P}(X=k, Y=\ell)\\ &= 0 + 1 \times \mathbb{P}(X=1, Y=1) + 2 \times \mathbb{P}(X=2, Y=1)\\ &\quad + 2 \times \mathbb{P}(X=1, Y=2) + 4 \times \mathbb{P}(X=2, Y=2)\\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Exercice C-113

Soit X et Y deux v.a. indépendantes de Bernoulli de même paramètre p. Calculer $\mathbb{E}(\min\{X, Y\})$.

Exercice C-114

Justifier la linéarité de l'espérance.

Proposition IX-4

Si X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes et admettant une espérance, alors XY admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(X\,Y) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y).$$

Exemple

On lance un dé équilibré à 6 faces, on note A le résultat obtenu, puis on lance une pièce équilibrée et on pose $X = A$ lorsque la pièce donne pile et $X = 2A$ lorsque la pièce donne face.

Déterminons l'espérance de la variable aléatoire X ainsi définie.

On note B la variable aléatoire valant 1 si la pièce donne pile et valant 2 si la pièce donne face. On a alors $X = AB$.

Le lancer du dé et le lancer de la pièce étant deux expériences indépendantes, il en est de même des variables aléatoires A et B donc $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(A)\mathbb{E}(B)$.

Par ailleurs $A \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1,6]\!])$ et $B \hookrightarrow \mathscr{U}(\{1;2\})$ donc :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1+6}{2}\,\frac{1+2}{2} = \frac{21}{4}.$$

Remarque

Si X et Y admettent une variance alors $\mathbb{E}(XY)$ existe (même si X et Y ne sont pas indépendantes). Cela provient de l'inégalité :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |xy| \leqslant \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

(qui se démontre en disant que $(x \pm y)^2 \geqslant 0$).

Le théorème de transfert permet alors d'écrire :

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{x \in X(\Omega) y \in Y(\Omega)} xy \mathbb{P}\Big((X = x) \cap (Y = y)\Big).$$

A.5 - Covariance d'un couple discret

Définition IX-5

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un même un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et qui admettent un moment d'ordre 2. La ***covariance*** de X et Y est :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X))\,(Y - \mathbb{E}(Y))\Big).$$

Remarques

1 ▹ Puisque X et Y admettent un moment d'ordre 2, c'est aussi le cas de $X - \mathbb{E}(X)$ et $Y - \mathbb{E}(Y)$ donc l'espérance de $(X - \mathbb{E}(X))\,(Y - \mathbb{E}(Y))$ existe.

2 ▹ On a : $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

En effet, on a :

$$(X - \mathbb{E}(X))\,(Y - \mathbb{E}(Y)) = XY - X\mathbb{E}(Y) - Y\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

puis par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X))\,(Y - \mathbb{E}(Y))\Big) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

3 ▹ Intuitivement le signe de $\mathrm{Cov}(X,Y)$ peut s'interpréter ainsi : si $\mathrm{Cov}(X,Y) \geqslant 0$ alors en moyenne lorsque X augmente, Y augmente ; si $\mathrm{Cov}(X,Y) \leqslant 0$ alors en moyenne lorsque X augmente, Y diminue.

4 ▹ On a $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$.

5 ▹ Si X, Y et Z sont des variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2 et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$$\mathrm{Cov}(\lambda X + Y, Z) = \lambda \mathrm{Cov}(X,Z) + \mathrm{Cov}(Y,Z) \quad \text{et} \quad \mathrm{Cov}(X, \lambda Y + Z) = \lambda \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(X,Z).$$

6 ▹ On a $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathbb{V}(X) \geqslant 0$.

Notons que $\mathrm{Cov}(X,X) = 0$ implique que X presque sûrement constante (mais non nécessairement presque sûrement nulle).

7 ▹ Si X et Y sont des variables aléatoires discrètes **indépendantes** admettant un moment d'ordre 2 alors $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Notons que deux variables vérifiant $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ sont dites ***non corrélées***. Deux variables indépendantes sont donc non corrélées.

8 ▹ La réciproque du point précédent est fausse. Par exemple, considérons une variable X suivant la loi uniforme sur $\{-1,1\}$ (loi de Rademacher) et une variable Y (sur le même espace probabilisé) suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

On suppose que X et Y sont indépendantes et on note $Z = XY$.

Alors Z et Y sont non corrélées mais ne sont pas indépendantes.

Proposition IX-6

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un même un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et qui admettent une variance.

Alors $X+Y$ admet une variance et : $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Démonstration

Corollaire IX-7

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un même un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et qui admettent une variance.

Si X et Y sont indépendantes alors : $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

Proposition IX-8

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un même un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et qui admettent une variance.

On a : $|\mathrm{Cov}(X, Y)| \leqslant \sigma(X)\,\sigma(Y)$.

Démonstration

Définition IX-9

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un même un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et qui admettent une variance.

On suppose de plus que X et Y sont de variance non nulle.

On appelle ***coefficient de corrélation linéaire*** et on note $\rho(X, Y)$ le réel :

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)}.$$

Remarques

1 ▹ Si X et Y sont indépendantes alors $\rho(X, Y) = 0$.

2 ▹ On a : $\left|\rho(X, Y)\right| \leqslant 1$.

Exercice C-115

Comment peut-on interpréter le fait que $\rho(X, Y) = \pm 1$?

B - Cas des variables aléatoires à densité

B.1 - Maximum, minimum

Soit X et Y deux variables aléatoires à densité **indépendantes**, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$; on note f_X et f_Y des densités respectivement de X et Y. On définit les applications :

$$Z = \max(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto \max\{X(\omega), Y(\omega)\} \ \text{ et } \ T = \min(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto \min\{X(\omega), Y(\omega)\},$$

ce sont des variables aléatoires.

► Pour tout réel t, on a :

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= \mathbb{P}(Z \leqslant t) \\ &= \mathbb{P}((X \leqslant t) \cap (Y \leqslant t)) \\ &= \mathbb{P}(X \leqslant t) \cdot \mathbb{P}(Y \leqslant t) \quad \text{par indépendance} \\ F_Z(t) &= F_X(t) \cdot F_Y(t). \end{aligned}$$

Par produit, la fonction F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points donc Z est une variable à densité et une densité est donnée, là où F_Z est dérivable, par :

$$f_Z(t) = F_Z'(t) = F_X'(t) \cdot F_Y(t) + F_X(t) \cdot F_Y'(t)$$

donc :

$$f_Z(t) == f_X(t)F_Y(t) + f_Y(t)F_X(t).$$

► De même, pour tout réel t, on a :

$$\begin{aligned} 1 - F_T(t) &= \mathbb{P}(T > t) \\ &= \mathbb{P}((X > t) \cap (Y > t)) \\ &= \mathbb{P}(X > t) \cdot \mathbb{P}(Y > t) \quad \text{par indépendance} \\ 1 - F_T(t) &= (1 - F_X(t)) \times (1 - F_Y(t)) \end{aligned}$$

et, par produit, la fonction F_T est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points donc T est une variable à densité et une densité est donnée, là où F_T est dérivable, par :

$$-f_T(t) = (1 - F_T)'(t) = (1 - F_X)'(t) \cdot (1 - F_Y(t)) + (1 - F_X(t)) \cdot (1 - F_Y)'(t)$$

donc :

$$f_T(t) = f_X(t)\,(1 - F_Y(t)) + f_Y(t)\,(1 - F_X(t)).$$

► Ces calculs se généralisent aisément au cas de n variables aléatoires indépendantes à densité :

$$Z = \max(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{et} \quad T = \min(X_1, \ldots, X_n)$$

alors :

$$F_Z(t) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(t) \quad \text{et} \quad 1 - F_T(t) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - F_{X_i}\right)(t).$$

Les variables Z et T sont à densité.

Lorsque $X_1, \ldots, X_n$ suivent la même loi, on a :

$$F_Z(t) = F_{X_1}(t)^n \quad \text{et} \quad 1 - F_T(t) = \left(1 - F_{X_1}(t)\right)^n.$$

Exercice C-116

Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes suivant des lois exponentielles de paramètres λ et μ respectivement.

1. Déterminer la loi de $\min(X, Y)$.

2. En déduire l'existence et le calcul de l'espérance de $\min(X, Y)$.

Exercice C-117

Soiet n un entier, avec $n \geqslant 2$, et $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes de densité f donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Étudier l'existence et la valeur éventuelle de $\mathbb{E}(X_i)$ et de $\mathbb{V}(X_i)$.

2. Déterminer la loi de $Y = \min_{1 \leqslant i \leqslant n}(X_i)$. Étudier l'existence de $\mathbb{E}(Y)$.

3. Même étude avec $Z = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}(X_i)$.

B.2 - Produit de convolution

Définition IX-10

Soit f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points). Pour tout réel x, on définit sous-réserve d'existence, $f * g(x)$ par

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t.$$

La fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f * g(x)$ est appelé le *produit de convolution* de f et g.

Exercice C-118

Soit f, g et h trois fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que f soit bornée sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t$ soient absolument convergentes.

1. Montrer que $f * g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Vérifier que $f * g = g * f$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f * (g + \lambda h) = (f * g) + \lambda(f * h)$.

Exemples

1 ▹ Posons pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}$. Calculons $f * f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$:

2 ▹ Soit c définie sur $\mathbb{R}$ par : $c(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.

Calculons $c * c(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice C-119

On considère les fonctions f, g et h données sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t)=\frac{1}{1+t^2},\quad g(t)=\begin{cases} e^{-t} & \text{si } t\geqslant 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\quad \text{et}\quad h(t)=\begin{cases} 1 & \text{si } 0\leqslant t\leqslant 1\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Calculer $f*h$, $g*g$ et $g*h$.

B.3 - Somme de deux variables aléatoires à densité

Théorème IX-11

Soit X et Y deux variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, de densités f_X et f_Y.

On suppose que X et Y sont indépendantes et que la fonction h donnée sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t)\mathrm{d}t$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Alors la variable aléatoire $X+Y$ est à densité et h est une densité de $X+Y$.

Exemples

1 ▹ Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée réduite. Alors $X+Y$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,2)$.

2 ▹ Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[-1,1]$. Étudions $Z = X + Y$.

B.4 - Somme de lois γ

Proposition IX-12

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires, sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant des lois $\gamma(\nu_1)$ et $\gamma(\nu_2)$.

Alors $X_1 + X_2$ suit la loi $\gamma(\nu_1 + \nu_2)$.

Démonstration

B.5 - Somme de lois normales

Proposition IX-13

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires, sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant des lois $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$.

Alors $X_1 + X_2$ suit la loi $\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Démonstration

C - Généralisation aux vecteurs aléatoires

C.1 - Vecteurs, lois, lois marginales

Définition IX-14

1. Un ***vecteur aléatoire*** sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est la donnée d'un n-uplet $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
2. La ***loi d'un vecteur aléatoire*** $(X_1, \dots, X_n)$ est donnée par la fonction de $F_{(X_1,\dots,X_n)}$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par :
$$F_{(X_1,\dots,X_n)}(t_1, \dots, t_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \leqslant t_i)\right).$$
3. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la loi de X8i est appelée la ***i-ème loi marginale*** de $(X_1, \dots, X_n)$.

Proposition IX-15

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ deux vecteurs aléatoires définis sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Si $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ ont **même loi** et si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une **fonction continue** alors les variables aléatoires $g(X_1, \dots, X_n)$ et $g(Y_1, \dots, Y_n)$ ont même loi.

Exemples

1 ▹ Si $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ ont même loi alors $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$ et $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i^2$ ont même loi.

2 ▹ Soit X_1 et Y_1 de loi $\gamma(\nu_1)$ et X_2 et Y_2 de loi $\gamma(\nu_2)$. On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et que Y_1 et Y_2 sont également indépendantes.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
F_{(X_1,X_2)}(x,y) &= \mathbb{P}\Big((X_1 \leqslant x) \cap (X_2 \leqslant y)\Big) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \leqslant x)\mathbb{P}(X_2 \leqslant y) \quad \text{(par indépendance)} \\
&= \mathbb{P}(Y_1 \leqslant x)\mathbb{P}(Y_2 \leqslant y) \\
&= \mathbb{P}\Big((Y_1 \leqslant x) \cap (Y_2 \leqslant y)\Big) \quad \text{(par indépendance)} \\
&= F_{(Y_1,Y_2)}(x,y)
\end{aligned}$$

donc les couples (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) ont même loi.

Puisque la fonction $(x, y) \mapsto \max\{x, y\}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, on en déduit que $\max(X_1, X_2)$ et $\max(Y_1, Y_2)$ ont même loi.

Remarque

Un ***vecteur aléatoire discret*** $(X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur aléatoire tel que toutes les variables X_i soient discrètes.

Dans ce cas, $X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$ est dénombrable.

La loi de ce vecteur est alors caractérisée par la donnée des :

$$\mathbb{P}\Big((X_1 = x_1) \cap \cdots \cap (X_n = x_n)\Big)$$

où $x_1 \in X_1(\Omega), \ldots, x_n \in X_n(\Omega)$.

Notons que, par exemple, les variables $X_1 + \cdots + X_n$, $X_1 \cdots X_n$, $\min(X_1, \ldots, X_n)$, $\max(X_1, \ldots, X_n)$ sont alors des variables discrètes.

C.2 - Indépendance

Définition IX-16

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On dit que les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont ***mutuellement indépendantes*** si, pour tout $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, les événements $(X_1 \leqslant t_1), \ldots, (X_n \leqslant t_n)$ sont mutuellement indépendants. Autrement dit :

$$\forall (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n,\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \leqslant t_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leqslant t_i).$$

Remarques

1 ▹ Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si :

$$\forall (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n,\ F_{(X_1, \ldots, X_n)}(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(t_i).$$

2 ▹ Si $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes alors, pour toute partie I de $[\![1, n]\!]$, les variables $(X_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendantes.

En particulier, si $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes alors $X_1, \ldots, X_n$ sont deux à deux indépendantes.

3 ▹ On dit qu'une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires est composée de variables mutuellement indépendantes si, pour toute partie **finie** I de $\mathbb{N}$, les variables $(X_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendantes.

4 ▹ On peut montrer que les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si pour tous intervalles $I_1, \ldots, I_n$ de $\mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \in I_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in I_i).$$

5 ▹ ***Cas discret–***

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire **discret** sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ alors les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si, pour tout $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i = t_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = t_i).$$

Proposition IX-17 (lemme des coalitions)

Soit $(X_1,\dots,X_n)$ un vecteur aléatoire défini sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.

Si les variables $X_1,\dots,X_n$ sont mutuellement indépendantes alors toute variable fonction de $X_1,\dots,X_p$ est indépendante de toute variable fonction de $X_{p+1},\dots,X_n$.

Exemples

1 ▹ Si X et Y sont indépendantes alors X^2 et e^Y sont indépendantes.
2 ▹ Si X, Y et Z sont mutuellement indépendantes alors $X+Y$ et Z sont indépendantes.
3 ▹ Si X, Y, Z et T sont mutuellement indépendantes alors $\max(X,Y)$ et $\min(Z,T)$ sont indépendantes.

Exercice C-120

Soit $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Déterminer la fonction de répartition de $\max(X_1,\dots,X_{n-1})$.

2. Calculer $\mathbb{P}\Big((X_n \geqslant X_1)\cap(X_n \geqslant X_2)\cap\dots\cap(X_n \geqslant X_{n-1})\Big)$.

C.3 - Espérance, variance

Proposition IX-18

Soit $(X_1,\dots,X_n)$ un vecteur aléatoire défini sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ et $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$.

Si, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, X_i admet une espérance alors $\lambda_1X_1+\dots+\lambda_nX_n$ admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(\lambda_1X_1+\dots+\lambda_nX_n)=\lambda_1\mathbb{E}(X_1)+\dots+\lambda_n\mathbb{E}(X_n).$$

Proposition IX-19

Soit $(X_1,\dots,X_n)$ un vecteur aléatoire défini sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.

Si, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, X_i admet une espérance et si les variables $X_1,\dots,X_n$ sont mutuellement indépendantes alors $X_1\times\dots\times X_n$ admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(X_1\times\dots\times X_n)=\mathbb{E}(X_1)\times\dots\times\mathbb{E}(X_n).$$

Proposition IX-20

Soit $(X_1,\dots,X_n)$ un vecteur aléatoire défini sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.

Si, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, X_i admet une variance et si les variables $X_1,\dots,X_n$ sont mutuellement indépendantes alors $X_1+\dots+X_n$ admet une variance et :

$$\mathbb{V}(X_1+\dots+X_n)=\mathbb{V}(X_1)+\dots+\mathbb{V}(X_n).$$

Plus généralement, si on considère de plus $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ alors $\lambda_1 X_1+\cdots+\lambda_n X_n$ admet une variance et :

$$\mathbb{V}(\lambda_1 X_1+\cdots+\lambda_n X_n)=\lambda_1^2\mathbb{V}(X_1)+\cdots+\lambda_n^2\mathbb{V}(X_n).$$

Exercice C-121

Soit $p\in[0,1]$ et $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et telles que, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, X_i suive la loi $\mathscr{B}(m_i,p)$.

Montrer que $X_1+X_2+\cdots+X_n$ suit la loi $\mathscr{B}(m_1+m_2+\cdots+m_n,p)$.

Exercice C-122

Soit $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et telles que, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, X_i suive la loi $\mathscr{P}(\lambda_i)$.

Montrer que $X_1+X_2+\cdots+X_n$ suit la loi $\mathscr{P}(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)$.

Exercice C-123

Soit $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et telles que, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, X_i suive la loi $\gamma(\nu_i)$.

Montrer que $X_1+X_2+\cdots+X_n$ suit la loi $\gamma(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_n)$.

Et si, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, X_i suit la loi $\mathscr{E}(1)$?

Exercice C-124

Soit $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi $\mathscr{E}(\lambda)$.

Déterminer la loi de $\lambda(X_1+\cdots+X_n)$ puis la loi de $X_1+\cdots+X_n$.

Exercice C-125

Soit $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et telles que, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, X_i suive la loi $\mathscr{N}(\mu_i,\sigma_i^2)$.

Déterminer la loi de $X_1+X_2+\cdots+X_n$.